# EKSPONENTTIFUNKTION MÄÄRITTELY INTEGRAALIMUOTOISEN LOGARITMIFUNKTION KAUTTA PITKÄN MATEMATIIKAN OPPISISÄLLÖISTÄ KÄSIN

Heidi Lindroos

Pro Gradu -tutkielma

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Helsingin yliopisto

Toukokuu 2015

| Tiedekunta/Osasto Fakultet/Sektion – Faculty | Laitos/Institution– Department |
| --- | --- |
| Matemaattis-luonnontieteellinen | Matematiikan ja tilastotieteen laitos |

Tekijä/Författare – Author

Heidi Lindroos

Työn nimi / Arbetets titel – Title

Eksponenttifunktion määrittely integraalimuotoisen logaritmifunktion kautta pitkän matematiikan oppisisällöistä käsin

Oppiaine /Läroämne – Subject

Matematiikan aineenopettaja

| Työn laji/Arbetets art – Level | Aika/Datum – Month and year | Sivumäärä/ Sidoantal – Number of pages |
| --- | --- | --- |
| Pro Gradu tutkielma | toukokuu 2015 | 70 |

Tiivistelmä/Referat – Abstract

Eksponenttifunktiota käsitellään lukiomatematiikassa kaikille reaaliluvuille määriteltynä funktiona, vaikka matemaattisesti se kyetään määrittelemään vain rationaaliluvuille. Irrationaalilukuja vastaavien arvojen olemassaolo perustellaan ainoastaan kuvaajan perusteella. Tutkimustehtävänä on laatia pitkän matematiikan pohjalta opetuskokonaisuus esimerkiksi syventävälle kurssille, jossa käsitellään eksponenttifunktiota rakentamalla se pala palalta kaikille reaaliluvuille. Opetuskokonaisuuden sisällöt perustuvat eksponenttifunktion määritelmälle, jossa se määritellään integraalina määritellyn logaritmifunktion kautta. Kyseinen määritelmä esitetään tutkielmassa yksityiskohtaisesti.

Ensimmäinen tutkimuskysymys koskee sitä, mitä määritelmästä tulisi ottaa opetuskokonaisuuden sisällöiksi ja minkälaiset tavoitteet näihin sisältöihin asetetaan. Toinen tutkimuskysymys on, kuinka tavoitteiden mukainen ymmärrys mahdollisesti saavutetaan. Tärkeimpänä työkaluna tutkimuskysymysten vastausten muodostamisessa on matemaattisten käsitteiden oppimista koskeva APOS – teoria. Työssä muodostetaan APOS – teorian mukainen malli eksponenttifunktiokäsitteen muodostuksesta tutkimuskysymysten pohtimisen avuksi. Se käsittelee eksponenttifunktion ymmärtämistä lähtien eksponenttifunktioon sisältyvästä lukujonosta aina eksponenttifunktion ymmärtämiseen siten, että käsittää eksponenttifunktion kaikille reaaliluvuille määriteltynä funktiona.

Opetuskokonaisuuden tavoitteena on ymmärtää juoni määritelmästä, mikä edellyttää eksponenttifunktion ymmärtämistä objektina. Eksponenttifunktio esiintyy määritelmässä objektina laskutoimituksissa, sekä funktiojoukkona. Opetuskokonaisuus sisältää ohjeistetun harjoituksen, jossa rakennetaan eksponenttifunktio GeoGebralla. Opetuskokonaisuus sisältää myös johdannon, jonka tavoitteena on ymmärtää eksponenttifunktio prosessina. Johdannossa esitellään eksponenttifunktion historiallista kehitystä. Erityisesti tutkitaan eksponentti- ja logaritmifunktion ominaisuutta samaistaa kertolasku ja yhteenlasku.

Avainsanat – Nyckelord – Keywords

eksponenttifunktio, logaritmifunktio, APOS – teoria, matematiikan opetus

Säilytyspaikka – Förvaringställe – Where deposited

Helsingin yliopisto, Kumpulan kampuskirjasto

Sisällys

# 1 Johdanto

Tässä tutkielmassa aiheena on eksponenttifunktio. Sitä käsitellään sekä matematiikan, että matematiikan oppimisen ja opetuksen näkökulmasta. Suurin huomio on pitkän matematiikan opiskelulla ja sen yhteyksillä korkeakoulumatematiikkaan. Tutkimustehtävänä on laatia suunnitelma opetuskokonaisuudesta, joka kertaa ja syventää eksponenttifunktiokäsitettä ja sen aihepiiriin kiinteästi liittyviä asioita. Tähän aihepiiriin kuuluvat pitkässä matematiikassa eksponenttifunktion lisäksi potenssien määritelmät ja laskusäännöt, logaritmin määritelmä ja logaritmifunktio, sekä eksponentti- ja logaritmifunktioiden derivaatat.

Eksponenttifunktio esiintyy koulumatematiikassa ensimmäisen kerran yläkoulussa geometrisen lukujonon muodossa. Yläkoulun lukujonot ovat muotoa $a^n$, $a \epsilon \mathbb{N}$ esimerkiksi $2, 4, 8, 16 \ldots$ ja niiden yhteydessä tarkastellaan kasvavan kasvun ilmiötä. Lukion pitkässä matematiikassa eksponenttifunktio laajenee määrittelyjoukoltaan kaikkiin reaalilukuihin, kun yläkoulussa siitä tarkasteltiin vain luonnollisille luvuille määriteltynä versiona. Eksponenttifunktiolle määritellään lukion ensimmäisellä kurssilla arvot $a^{-n}$ ja $a^{\frac{m}{n}}$, missä $a > 0$ ja $m$ ja $n$ ovat positiivisia kokonaislukuja. Eksponenttifunktiota käsitellään kaikille reaaliluvuille määriteltynä funktiona ja arvon olemassaolo kaikille reaaliluvuille perustellaan kuvaajan avulla. Kuvaajan perusteella todetaan, että jokaiselle muuttujan arvolle $x$ on olemassa arvo $y = a^x, y > 0$. Tässä yhteydessä määritellään logaritmi: $a^x = y$ on yhtäpitävää sen kanssa, että $\log_a y = x$. Hamdan (2008) esittää, että vaikka kyseessä ei ole matemaattisesti täsmällinen määrittelytapa, opiskelijoiden kohdatessa logaritmin määritelmän ensimmäistä kertaa se on ”enemmän kuin tarpeeksi”. Pitkän matematiikan kahdeksannessa kurssissa tutkitaan vielä tarkemmin eksponenttifunktion ominaisuuksia sen derivaattafunktiolla.

Tavoitteena oleva opetuskokonaisuus on suunniteltu pitkän matematiikan eksponenttifunktion aihepiiriä syventäväksi. Eksponenttifunktion paikkaa syventävällä kurssilla voi perustella esimerkiksi syventävälle kurssille osallistuvien opiskelijoiden todennäköisellä jatko-opintojen suuntautumisella. Opiskelijat, jotka osallistuvat pitkän matematiikan syventävällä kurssille, saattavat muita todennäköisemmin hakeutua korkeakouluun matemaattiselle alalle ja eksponenttifunktion asema on keskeinen korkeakoulumatematiikassa (Pitta-Pantazi ym 2007, Weber 2002a). Eksponenttifunktion merkitys matematiikalle perustuu siihen, että funktiolla $e^x$ on yksinkertainen derivaattafunktio, eksponenttifunktiot ovat ainoita jatkuvia funktioita, joille pätee $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ funktion $f(x) = 0$ lisäksi ja eksponenttifunktio kasvaa nopeammin kuin mikään muu yksittäinen termi eli $\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$ (Spivak 1994).

Opetuskokonaisuuden matemaattisena lähtökohtana on se, että teknisesti pitkän matematiikan menetelmillä ei kyetä määrittelemään eksponenttifunktiota irrationaaliluvuille, ainoastaan rationaaliluvuille kuten jo edellä kuvattiin. Tässä työssä käydään läpi eräs eksponenttifunktion määritelmä kaikille reaaliluville. Siinä eksponenttifunktio määritellään logaritmifunktion kautta ja logaritmifunktio määritellään puolestaan integraalina $\int_1^x \frac{1}{t} dt, t > 0$ (esimerkiksi Salas & Hille 1971 ja Spivak 1994). Tästä määräytyy tutkimuksen perimmäinen tehtävä: pohtia kuinka syventävässä opetuksessa voi lähestyä kyseessä olevaa matemaattisesti tarkkaa funktiokonstruktiota pitkän matematiikan oppisisältöjä pohjana käyttäen. Edellä mainittua määritelmää käytetään opetuskokonaisuuden matemaattisena ydinsisältönä.

Opetuskokonaisuuden suunnittelemisen opettamiseen ja oppimiseen liittyvänä lähtökohtana puolestaan on, että eksponenttifunktion määritelmä kaikkine yksityiskohtineen ei ole sellaisenaan sopiva opetuskokonaisuuden sisällöksi. Tätä lähtökohtaa puoltaa työn kolmannessa luvussa esiteltävän tutkimushistorian tulokset, joiden mukaan jo pelkkien aihepiirin lukiosisältöjen omaksumisessa esiintyy puutteita (Dawn 2008, Braidenbach ym. 1992, Hamdan 2008, Panagiotou 2011, Pitta-Pantazi ym. 2007 ja Weber2002a ja b). Seuraavaan on poimittu tämän työn tavoitteita ajatellen tärkeimpiä havaintoja tutkimushistoriasta koskien eksponenttifunktiokäsitteen oppimista ja opetusta lukio- ja korkeakouluasteilla. Huomioitavaa kuitenkin on, että toistaiseksi eksponenttifunktiota on tutkittu oppimisen ja opetuksen näkökulmasta vain vähän (Weber 2002a ja Pitta-Pantazi ym. 2007).

Weber (2002a, 2002b) havaitsi tutkimushenkilöillään olevan vaikeuksia perustella eksponentti- ja logaritmifunktioiden ominaisuuksia. Pitta-Pantazin, Constantinoun ja Zachariaden (2007) tutkimuksen lukio-opiskelijat osasivat hyvin vaihtelevasti vertailla potenssien välisiä suuruussuhteita, kuten potenssien $0{,}5^{-14}$ ja $0{,}5^{-23}$ välistä suuruutta. He selittivät esiintyneitä vaikeuksia sillä, että eksponenttifunktion käsitteellinen kehitys oli jäänyt köyhäksi, se oli ymmärretty vain niin sanotun prototyyppikäsityksen tasolla. Heidän mukaan eksponenttifunktioon liittyvä prototyyppikäsitys vastaa luonnollisten kokonaislukujen toistuvaa kertomista. Myös Weber havaitsi monen tutkimushenkilönsä kykenevän käsittelemään ja kuvailemaan eksponenttifunktioon liittyviä tilanteita ainoastaan edellä kuvatun positiivisten luonnollisten lukujen toistuvan kertomisen proseduurin avulla. Millaisia kommentteja kirjallisuudessa esiintyy sitten koskien aiheen opetusta? Dawnin (2008) mukaan eksponenttifunktio käydään monesti vain nopeana alustuksena logaritmeille ja logaritmifunktiolle ja sen opetus saattaa siten jäädä perusesimerkkeihin. Opetuksen suunnittelussa on kuitenkin otettava huomioon, että eksponenttifunktio on käsitteenä hankala. Aihepiiriin liittyvä käsitteellinen ymmärrys vaatii syvällistä ymmärrystä lukujärjestelmästä ja sen sisäisestä hierarkiasta (Panagiatoun 2011). Hamdan (2008) mainitsee eksponentti- ja logaritmifunktioiden opetukseen liittyväksi haasteeksi vielä lisäksi sen, että pitkässä matematiikassa niihin liittyvät sisällöt sijaitsevat kursseilla hajallaan.

Ensimmäinen tutkimuskysymys on, mitä sisältöjä eksponenttifunktion matemaattisesti tarkasta määritelmästä valitaan pitkän matematiikan syventävällä kurssille. Samanaikaisesti valittujen sisältöjen tulisi olla laajuudeltaan sellaiset, että määritelmän kokonaisjuoni selviää, mutta toisaalta myös vaikeustasoltaan sopivia. Valituille sisällöille on asetettava myös tavoitteet. Toinen tutkimuskysymys liittyy ensimmäiseen: kuinka asetettuihin tavoitteisiin liittyvä ymmärrys on mahdollista saavuttaa pitkän matematiikan oppisisältöjen pohjalta? Tähän kysymykseen vastataan hyödyntäen aihepiiriin liittyvää aikaisempaa tutkimusta, mutta tärkeimpänä työkaluna on Jean Piaget'n reflektiivisen abstraktion teorian pohjalta kehitetty vaativampien matemaattisten käsitteiden oppimista mallintava APOS - teoria (Asiala ym. 1996, Dubinsky 1991 ja Dubinsky & McDonald 2002). Teorian avulla on tarkoitus muodostaa hypoteesi siitä, kuinka henkilö muodostaa käsityksen eksponenttifunktiosta: sen lukujonomuotoisesta hahmosta aina siihen pisteeseen asti, että kykenee ymmärtämään sen derivoituvana, kaikille reaaliluvuille määriteltynä funktiona sekä ymmärtämään, minkälaisia sen ominaisuudet ovat ja miksi ne ovat sellaisia. Tutkimuskysymyksiin vastataan luvussa 5.

Opetuskokonaisuus suunnitellaan tutkimuskysymysten pohjalta. Sen sisällöt ja tavoitteet asettaa ensimmäisen tutkimuskysymyksen vastaus. Se taas, kuinka kyseiset sisällöt esitetään tavoitteiden saavuttamiseksi, suunnitellaan APOS – teorian perusteella tehdyn eksponenttifunktiokäsitteen muodostusta kuvaavaan mallinuksen avulla.

Varsinaisena tutkimustehtävänä on opetuskokonaisuuden laatiminen. Tutkimustehtävän taustalla on kuitenkin myös henkilökohtaisia tavoitteita koskien kehittymistä matematiikan aineenopettajana. Ensimmäinen näistä tavoitteista on kehittää matemaattista osaamista. Toinen tavoite liittyy pitkän matematiikan sisältöihin. En ole ollut kunnolla pitkän matematiikan kanssa tekemisissä moneen vuoteen, joten halusin käyttää tilaisuuden hyväksi, ja ottaa haltuun kunnolla yhden kokonaisuuden pitkän matematiikan sisällöistä. Kolmas tavoite liittyy luovuuteen. Tämän tutkielman lähtökohdat asettavat haastavat puitteet kokeilla ja kehittää luovuutta matematiikan opettajana. Koko graduun liittyvän työprosessin anteja opettajuudelleni pohdin vielä lopuksi lyhyesti luvussa 7.

# 2 Taustateoriaa

Tässä luvussa esitellään tutkielman teoreettisena viitekehyksenä oleva oppimisteoria. Dubinsky ja McDonald (2002) luetteloivat useita matemaattisten oppimisteorioiden tehtäviä. Heidän mukannsa oppimisteorioiden tehtävänä on esimerkiksi auttaa ennakoinnissa, selittää havaittuja ilmiöitä, auttaa tutkimusaineistojen analysoinnissa sekä antaa käsitteitä kuvaamaan oppimiseen liittyviä ilmiöitä. Niistä tärkein tässä työssä on olla apuna opetuksen suunnittelussa ja ennakoinnissa. Näiden lisäksi oppimisteorialla on merkitys analyyttisena työkaluna aihepiirin jäsentelyssä. Eksponenttifunktiota tullaan käsittelemään hyvin eri tasoilla: niin koulumatematiikan oppisisällöistä käsin, kuin myös matemaattisesti tarkkojen määritelmien kautta.

Oppimisteoriaksi tähän työhön on valittu ”Research in Undergraduate Mathematics Education Community” – nimisen tutkimusryhmän viimeisten vuosikymmenten aikana kehittämä matemaattisten käsitteiden oppimista mallintava APOS- teoria (Dubinsky & McDonald 2002). Se on kehitetty laajasti tunnetun kehityspsykologin Jean Piaget'n reflektiivisen abstraktion teorian pohjalle soveltaen sitä erityisesti vaativampien matemaattisten käsitteiden oppimiseen.

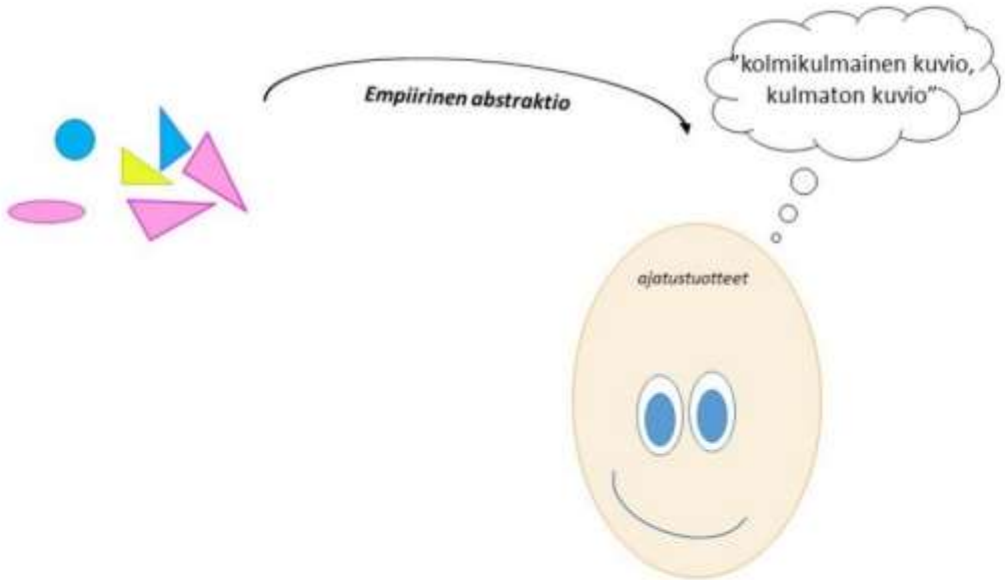
Teoriaa on käytetty viitekehyksenä tutkimuksissa koskien abstraktin algebran, diskreetin matematiikan, analyysin ja tilastotieteen käsitteiden oppimista (Dubinsky & McDonald 2002). Sitä on käytetty myös yksinkertaisempien matemaattisten käsitteiden, kuten murtolukujen oppimisen tutkimiseen (Dubinsky & McDonald 2002). Nämä ovat osoittaneet, että teoria on käyttökelpoinen myös muuhun, kuin vain yliopistotason matematiikan oppimisen ja opetuksen tutkimiseen (Dubinsky & McDonald 2002). Tämän työn kohderyhmänä ovat sellaiset opiskelijat, jotka kertaavat ja syventävät pitkää matematiikkaa, joten kohderyhmänsä puolesta APOS—teoria sopii hyvin tämän työn taustateoriaksi.

## 2.1 Empiirinen, pseudo-empiirinen ja reflektiivinen abstraktio

Piaget kehitti reflektiivisen abstraktion teorian kuvaamaan ihmisen loogisen ja matemaattisen ajattelun kehitystä. Piaget'n tutkimustyö keskittyi lapsiin ja yksinkertaisiin käsitteisiin, mutta hän esitti, että hänen teoriansa on sovellettavissa myös vaativampien matemaattisten käsitteiden oppimisen kuvaamiseen (Dubinsky 1991, s. 95). APOS – teoria on kehitetty Piaget'n reflektiivisen abstraktion teorian pohjalta mallintamaan korkeakoulumatematiikan käsitteiden oppimista.

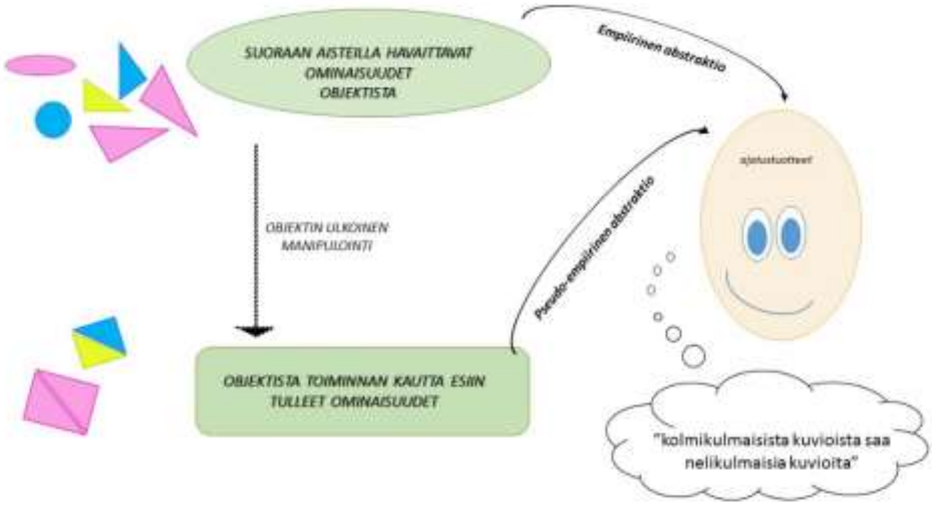
Kentin Yliopiston professori Ed Dubinsky esittelee artikkelissaan (1991) reflektiivisen abstraktion teoriaa vaativampien matemaattisten käsitteiden oppimisen näkökulmasta. APOS – teoria on rakennettu näille näkökulmille ja tämän perustan esittely on tämän osion tarkoitus. Dubniskyn artikkelissa viitataan kaikkiaan kolmeentoista Piaget'n kirjaan, ja koska tämän työn puitteissa ei ole mahdollista lukea näin suurta määrää kirjoja, niihin viitataan toisen käden lähteinä (esimerkiksi Dubisnky 1991 → Piaget & Garcia 1983, s.250). Reflektiivisen abstraktion käsitteeseen liittyy myös empiirinen ja pseudo-empiirinen abstraktio, sillä ne edeltävät Piaget'n teorian mukaan reflektiivistä abstraktiota.

Abstraktiolla Piaget tarkoittaa ihmisen ajattelutyötä, jonka myötä henkilölle syntyy uusi matemaattinen ajatustuote. Reflektiivisen abstraktion lisäksi on myös kaksi muuta abstraktiotyyppiä, empiirinen ja pseudo-empiirinen abstraktio. Aloitetaan empiirisellä ja pseudo-empiirisellä abstraktiolla. Ne ovat luonteeltaan samankaltaisia, sillä kummankin tiedonmuodostuslähteenä ovat kohteen ulkoiset ominaisuudet (Dubinsky 1991 → Beth & Piaget 1966, s. 188-189). Jos kohde olisi esimerkiksi funktio, niin ulkoisia ominaisuuksia voisi havaita sen kuvaajasta tai lausekkeesta. Empiirisen ja pseudo-empiirisen abstraktion kautta objektin ulkoisista ominaisuksista johdetaan kohteeseen liittyvää sisäistä tietoa (lähde). Empiirisen ja pseudoempiirisen abstraktion kautta saatu tieto on riippuvainen olosuhteista, tekijän havainnointikyvystä ja hänen aikaisemmista tiedoista (Dubinsky 1991, s.97).



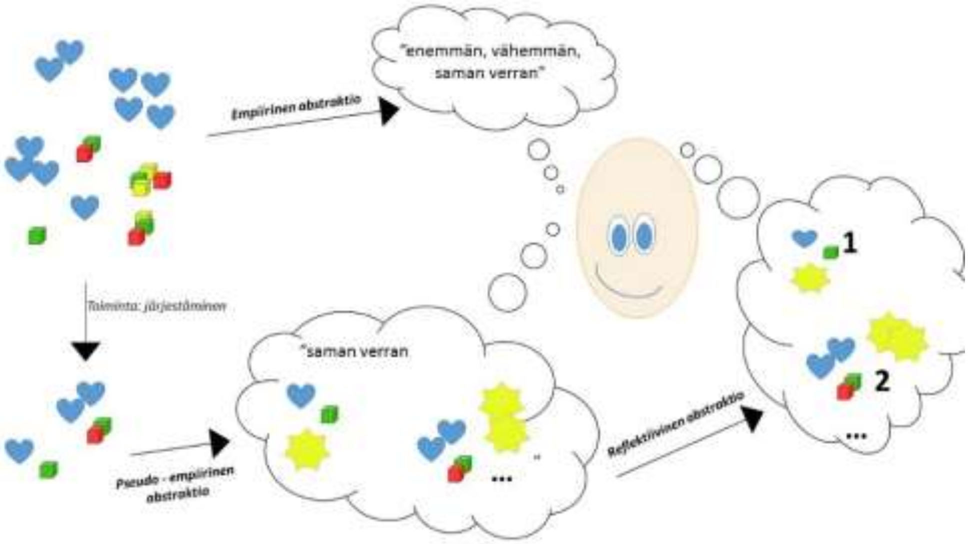

KUVA 1. YKSINKERTAINEN ESIMERKKI EMPIIRISESTÄ ABSTRAKTIOSTA. EMPIIRISEN ABSTRAKTIOSSA KOHTEEN ULKOISET OMINAISUUDET MUUTTUVAT HENKILÖN SISÄISEKSI TIEDOKSI.

Yksinkertainen esimerkki empiirisestä abstraktiosta on se, kun lapsi kuvioiden tarkastelun myötä oppii tunnistamaan kolmion ja erottamaan sen muiden tyyppisistä kuvioista (Tall 2013, s.9) (kuva 1). Pseudoempiirisessä abstraktiossa havainnoidaan niin ikään ulkoisia ominaisuuksia, mutta ne tulevat esiin vasta tekemällä kohteelle operaatioita (Dubinsky 1991 → Piaget 1985, s. 18-19). Kuvioiden yhteydessä nämä operaatiot voisivat olla piirtämistä, leikkelyä, kääntelyä ja yhdistelyä. Esimerkiksi kolmiosta sopivan operoinnin kautta paljastuu se, että kahdesta samanlaisesta kolmiosta saa muodostettua nelikulmion (kuva 2).




**KUVA 2. PSEUDO-EMPIIRISESSA ABSTRAKTIOSSA TOIMINNAN KAUTTA PALJASTUNEISTA ULKOISISTA OMINAISUUKSISTA TULEE HENKILÖN SISÄISTÄ TIETOA.**

Reflektiivisellä abstraktiolla Piaget tarkoittaa syntyneiden ajatustuotteiden järjestelemistä siten, että niistä syntyy korkeamman tason ajatustuote (Dubinsky 1991 → Piaget 1980, s. 89-97). Piaget käyttää esimerkkinä ihmisen varhaisesta reflektiivisestä abstraktiosta sitä, kuinka lapsi oppii luonnollisiin lukuihin liittyviä käsitteitä ja ominaisuuksia palikoilla leikkimisen avulla (Dubinsky 1991 → Piaget 1972, s. 37-38).




**KUVA 3. REFLEKTIIVISEN ABSTRAKTION KAUTTA LUKUMÄÄRÄKÄSITYKSESTÄ SYNTYY KORKEAMMAN TASON AJATUSTUOTE, KUVAN ESIMERKKITAPAUKSESSA LUONNOLLISET LUVUT.**

Reflektiivinen abstraktio luonnollisten lukujen yhteydessä on esimerkiksi se, kun lapsi oppii yhdistämään luonnolliset luvut havaitsemiinsa eri lukumääriin (kuva 3).

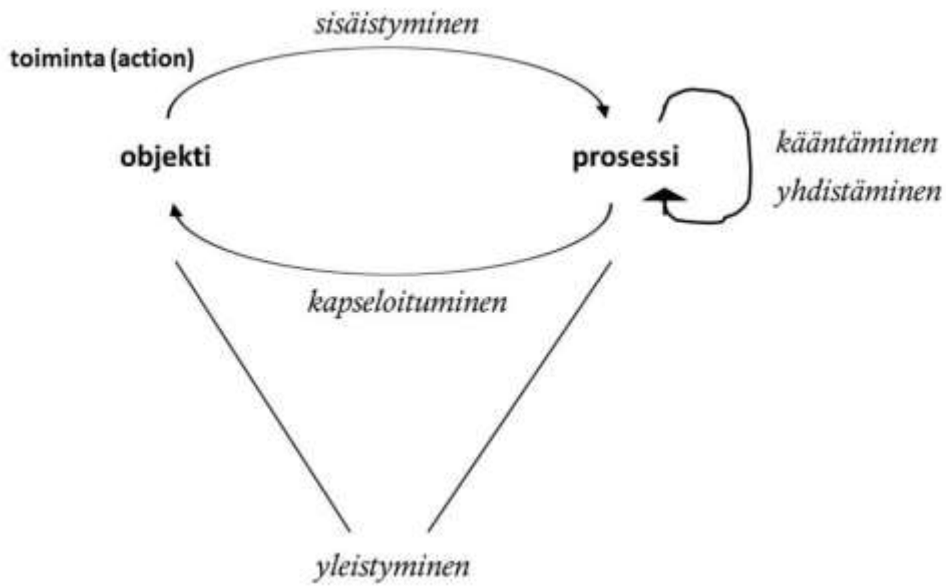
Dubinsky nostaa esiin Piaget'n edellistä esimerkkiä hiukan monimutkaisemman esimerkin siitä, kuinka lapsi oivaltaa luonnollisten lukujen järjestyksen (Dubinsky 1991 → Piaget 1972, s. 37-38). Lapsi suorittaa erilaista ryhmittelyä ja vertailuja palikoilla (toiminta) (kuva 4). Sitten hän sisäistää ne ajatustuotteiksi (empiirinen ja pseudo-empiirien abstraktio). Lopulta hän yhdistelee ne yhdeksi ajatustuotteeksi: luonnollisten lukujen järjestykseksi. Reflektiivinen abstraktio kasvatustieteellisen matematiikan tutkimuksen käsitteenä on osoittautunut hedelmälliseksi prosessin kuvailussa, jossa henkilö ymmärtää yhteenlaskun summana, toistuvan kertomisen tulona tai sen, kuinka operaatio, esimerkiksi "kerro luku kahdella ja lisää sitten kuusi", muuttuu lausekkeeksi $(2x + 6)$ (Tall 2013, s.9). Tässä tutkielmassa ei kuitenkaan käytetä reflektiivisen abstraktion teoriaa sellaisenaan. Seuraavassa osiossa esitellään, kuinka itse APOS – teoria rakentuu reflektiivisen abstraktion teorialle.


**KUVA 4. REFLEKTIIVINEN ABSTRAKTIO LUONNOLLISTEN LUKUJEN JÄRJESTYKSESTÄ.**

### 1.1.1 Reflektiivisen abstraktion konstruktiot ja APOS-teoria

Piaget pyrki tutkimuksissaan jäljittämään, kuinka reflektiivisessä abstraktiossa tapahtuva ajatustuotteen jalostus tapahtuu. Nimitetään tästä eteenpäin tätä käsitteisiin liittyvää työtä konstruktioksi, kuten kognitio- ja kasvatustieteissä yleisesti tehdään ja kuten myös Piaget sitä nimittää. Piaget löysi useita erityyppisiä konstruktioita. APOS – teorian kehittäjät poimivat niistä viisi tyyppiä, jotka ovat tärkeitä korkeamman matematiikan käsitteiden omaksumisessa (Dubinsky 1991, s.100). Ne ovat *sisäistäminen*, *yhdistely*, *toimintojen käänteinen suorittaminen, kapselointi ja yleistäminen.* Ne muodostavat APOS – teorian toisen osa-alueen. Toisena osa-alueena ovat matemaattiset tiedot ja taidot: toiminnot (**a**ction), prosessit (**p**rocess), objektit (**o**bject) ja skeemat (**s**chema). Osa-alueet liittyvät toisiinsa siten, että Piaget'n konstruktiot toimivat linkkeinä toimintojen, prosessien, objektien ja skeemojen välillä (kuva 5). Seuraavaksi käydään kohta kohdalta läpi kuvan kaavio. Tarkoituksena on määritellä, minkälaista matemaattista tietoa toiminnot, prosessit, objektit ja skeemat ovat, ja kuinka ne muodostuvat toinen toisistaan Piaget'n reflektiivisen abstraktion konstruktioilla.

Lähdetään purkamaan kuvan (kuva 5) kokonaisuutta objektiin kohdistuvasta toiminnasta. Dubinsky (1991, s. 105) luettelee ensinnäkin objekteista esimerkkeinä luvut, muuttujat, funktiot, topologiset avaruudet, topologiat, ryhmät, vektorit ja vektoriavaruudet. Toiminnalla taas tarkoitetaan objektien ulkoista havainnointia ja muokkaamista. Esimerkiksi funktion suhteen ulkoista toimintaa on arvon sijoittaminen muuttujan paikalle (Braidenbach ym. 1992). Pelkällä toimintatasolla oleva henkilö kykenee edistämään ongelmatilannetta kohti ratkaisua vain reagoimalla nähtävissä oleviin johtolankoihin (Asiala ym. 1996).

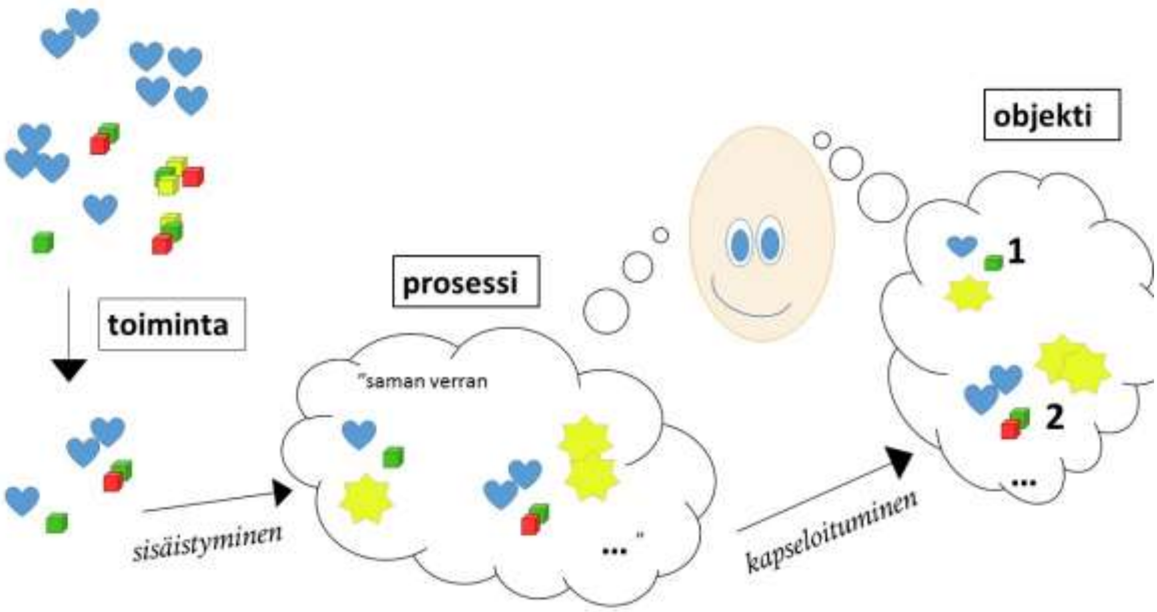



KUVA 5. APOS –TEORIAN MUKAISET MATEMAATTISEN TIEDOT JA TAIDOT JA PIAGET'N VIISI KONSTRUKTIOTA.

Toiminta on tiedonlähde *sisäistämiskonstruktiolle.* Siinä on kyse siitä, että konkreettisesti suoritettujen toimintojen sarja muuttuu osaksi sisäistyneiden operaatioiden systeemiä (Dubinsky 1991 → Piaget 1980, s. 900). Piaget määrittelee sisäistyneen toiminnan prosessiksi (kuva 5). Sisäistäminen tapahtuu esimerkiksi toistamalla toimintoa niin usein, että kykenee lopulta näkemään lopputuloksen ilman toiminnon suorittamista (Asiala ym. 1996). Sisäistymisestä on kyse edellisen osion esimerkeissä, kun lapsi kuvioiden kanssa toimimisen myötä oivaltaa kuvioiden ominaisuuksia tai ymmärtää, mitä tarkoittaa vähemmän, enemmän ja saman verran. Dubinsky esittää sisäistämisestä esimerkiksi vaativamman matematiikan yhteydessä sen, kuinka henkilö oivaltaa todistuksen vaiheineen ja siinä esiintyneine käsitteineen yhtenä prosessina (Dubinsky 1991, s. 103). Hänen mukaansa nimittäin on tyypillistä, että henkilö ymmärtää todistuksen etenemiseen liittyvät yksittäiset askeleet, mutta ei koko juonta. Funktioita vielä esimerkkinä käyttäen, funktioiden $sinx$ tai $\ln x$ kuvailu ja käsittely edellyttävät prosessiymmärrystä, jos oletetaan että muistinvaraisiin ominaisuuksiin ei saa nojautua (Asiala ym. 1996). Tämä johtuu siitä, että niiden lausekkeita ei voi ulkoisesti työstää eteenpäin.

Prosesseja muodostuu siis toimintojen sisäistämisen kautta, mutta niitä syntyy APOS – teorian mukaan myös *yhdistelykonstruktion* ja *kääntämiskonstruktion* kautta. Yhdistelykonstruktiossa on kyse kahden tai useamman prosessin yhdistämisestä siten, että muodostuu uusi. Arvatenkin yhdistetyn funktion käsittäminen edellyttää yhdistelykonstruktiota, nimittäin kahden funktioprosessin yhdistämistä (Braidenbach ym. 1992). *Kääntämiskonstruktiossa* taas henkilö muodostaa uuden prosessin jostain olemassa olevasta kääntämällä sen. Esimerkiksi integraalikäsitteen tai käänteisfunktiokäsitteen ymmärtääkseen on osattava muodostaa käänteinen prosessi (Braidenbach ym. 1992 ja Dubinsky 1991).

Seuraavaksi kaaviosta tulee vastaan se, kuinka prosessi muuttuu objektiksi. Objekteja muodostuu prosessista *kapseloitumiskonstruktion* kautta, jonka myötä henkilö kykenee näkemään dynaamisen prosessin staattisena objektina. Henkilön ymmärtäessä, että myös prosessien lopputulosta voi muokata, voidaan hänen sanoa saavuttaneen objektivaiheen (Asiala ym. 1996). Yksinkertaisena esimerkkinä taas luonnollisten lukujen oppimista käyttäen, lapsen kyetessä yhdistämään käsityksensä lukumääristä numerosymboleihin, hänen prosessikäsitys luonnollisista luvuista kapseloituu objektiksi (kuva 6). Piagert'n teorian mukaan prosesseja on mahdollista muodostaa usealla tavalla (sisäistämällä, kääntämällä ja yhdistämällä), mutta objekteja on mahdollista muodostaa vain prosessista käsin, kapseloimalla prosessi objektiksi (Braidenbach ym. 1992, s. 250).




**KUVA 6. LUONNOLLISTEN LUKUJEN KAPSELOITUMINEN.**

Dubinsky esittää mielenkiintoisen esimerkin kapseloitumisesta. Se on sama kuin tämän työn matemaattinen ydinsisältö, määritelmä:

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \log x\,, x > 0.$$

Kyseisen määritelmän omaksumiseen tarvitaan Dubinskyn mukaan useamman toiminnon sisäistämistä ja niiden yhdistelyä, mutta ennen kaikkea kapseloimiskonstruktiota. Kapseloitumisessa integraalifunktion määrittämä muuttuvien pinta-alojen prosessi muodostuu yhdeksi kiinteäksi objektiksi, logaritmifunktioksi. Dubinskyn mukaan kapseloitumiskonstruktiota vaativat käsitteet ovat opiskelijoille vaikeita omaksua. Funktioon liittyvää kapseloitumiskonstruktiota edellyttää myös kyky käsitellä funktioiden välisiä laskutoimituksia, funktiojoukkoja tai funktiota muuttujana (Braidenbach ym. 1992).

*Yleistymiskonstruktiossa* on kyse siitä, että aiheeseen liittyvä tietämys ei lisäänny, mutta kyky soveltaa sitä erilaisiin tilanteisiin laajenee (Braidenbach ym. 1992, s.250). Mitä yleistyneempi käsite, sitä paremmat edellytykset henkilöllä on reagoida kyseiseen käsitteeseen liittyviin uusiin ongelmatilanteisiin ilman erityistä ohjausta. Käsitteen yleistymisestä Dubinsky mainitsee esimerkkinä funktion ymmärtämisen myös silloin, kun funktion muuttujana on funktio, vektori tai joukko (Dubinsky 1991, s. 104).

Kaavion osa-alueet on nyt selitetty, mutta APOS – teorian mukainen neljäs matemaattisen tiedon osa, skeema, on vielä selittämättä. Sitä ei ole piirretty kaavioon, mutta se liittyy kuitenkin kaikkiin kaavion osiin. Skeemalla tarkoitetaan alati muuttuvaa henkilön mentaalista käsitteeseen liittyvää kokonaisuutta, joka koostuu toiminnoista, prosesseista, objekteista, näiden välisistä yhteyksistä ja linkeistä muihin käsitteisiin (Dubinsky & McDonald 2002).

# 3 Eksponenttifunktio lukion pitkässä matematiikassa ja opetukseen ja oppimiseen liittyvää tutkimushistoriaa

Tämän luvun tarkoitus on tutkimuslähtökohtien esittely. Ensimmäisenä lähtökohtana on se, että eksponenttifunktio kyetään määrittelemään lukiomatematiikassa vain rationaaliluvuille. Toisena lähtökohtana ovat ne taidot, jotka voi olettaa olevan pitkän matematiikan opiskelijalla ja toisaalta ne, joita ei voi olettaa olevan. Aluksi tässä luvussa esitellään pitkän matematiikan eksponenttifunktion aihepiiriin liittyvät oppisisällöt oppikirjojen ja opetussuunnitelman avulla ja luvun lopuksi esitellään aiheen oppimiseen ja opetukseen liittyvää tutkimushistoriaa.

Koulumatematiikan tasoista tarkastelussa on pitkä matematiikka, koska lyhyestä matematiikasta käsin ei ole mahdollista saavuttaa esitietoja- ja taitoja, joita tämän työn kohteena oleva opetuskokonaisuus vähintään edellyttää. Lyhyen matematiikan oppisisältöihin ei kuulu eksponentti- ja logaritmifunktiot, vaan aihetta käsitellään vain yhtälönratkaisun ja sovellustehtävien lähtökohdista (Opetushallitus 2013). Lisäksi integraalilaskentaa ei ole lainkaan lyhyessä matematiikassa, kun taas tämän työn opetuskokonaisuuden pohjana käytettävässä eksponenttifunktion määrittelyssä sitä tarvitaan. Siinä eksponenttifunktio rakennetaan integraalifunktion $\int \frac{1}{x} dx$ pohjalta. Määritelmä esitetään myöhemmin neljännessä luvussa.

## 3.1 Eksponenttifunktio pitkässä matematiikassa

Pitkän matematiikan eksponenttifunktion aihepiirin liittyvät oppisisällöt jakaantuvat kahteen suurempaan aihekokonaisuuteen. Ensimmäinen aihekokonaisuus on ensimmäisen kurssin lopussa, johon kuuluu potenssien määritelmät rationaalilukueksponenteille ja niistä johdetut laskusäännöt. Potenssien määritelmät vastaavat eksponenttifunktion rationaalilukumuuttujien arvoja. Loput arvot, toisin sanoen irrationaalilukuja vastaavat arvot, saadaan ”silottamalla” kuvaaja ja toteamalla sen perusteella, että eksponenttifunktiolla on olemassa arvo $y = a^{\log_a y} = a^x$ jokaiselle nollaa suuremmalle reaaliluvuille. Silottamiselle viitataan siihen, että esitellyn teorian perusteella kuvaaja olisi todellisuudessa täynnä reikiä, sillä irrationaalilukuja on ääretön määrä. Toinen aihekokonaisuus taas sijoittuu pitkän matematiikan kahdeksannelle kurssille, jossa eksponenttifunktiota käsitellään derivoinnin näkökulmasta. Derivointimenetelmien myötä eksponenttifunktion funktio-ominaisuudet tulevat uudella tavalla tarkasteluun ja esille.

### 3.1.1 Eksponenttifunktio kurssilla funktiot ja yhtälöt

Eksponenttifunktio esitellään lukion pitkässä matematiikassa ensimmäisen kerran ensimmäisessä kurssissa, jossa se on listattu yhdeksi kurssin keskeiseksi sisällöksi potenssi- ja juurifunktioiden sekä yhtälöiden ohella (Opetushallitus 2013). Opetussuunnitelman mukaan eksponenttifunktion tutkimisen tarkoitus on syventää yleisesti funktiokäsitteen ymmärrystä (Opetushallitus 2003).

**Potenssien määrittely rationaalisille eksponenteille ja potenssikaavat**

Eksponenttifunktion esittelyä edeltää potenssien määrittely kaikille rationaaliluvuille ja potenssikaavojen johtaminen näistä määritelmistä käsin (kuva 7). Potenssimääritelmien rooli eksponenttifunktioon nähden on se, että ne määrittelevät eksponenttifunktion $f(x) = a^x$ arvot kaikille rationaalisille muuttujille.

Potenssien määrittely kaikille rationaaliluvuille, kun luku n on positiivinen kokonaisluku:

$$a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \ (n\ kpl)$$
$$a^0 = 1, a \neq 0$$
$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$
$$a^{-r} = \frac{1}{a^r}$$
$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$
$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$
$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

Olkoon r ja s rationaalilukuja. Tällöin pätevät kaavat:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$
$$(a^r)^s = a^{rs}$$
$$(ab)^r = a^r b^r$$
$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

KUVA 7. POTENSSIEN MÄÄRITELMÄT JA LASKUSÄÄNNÖT.

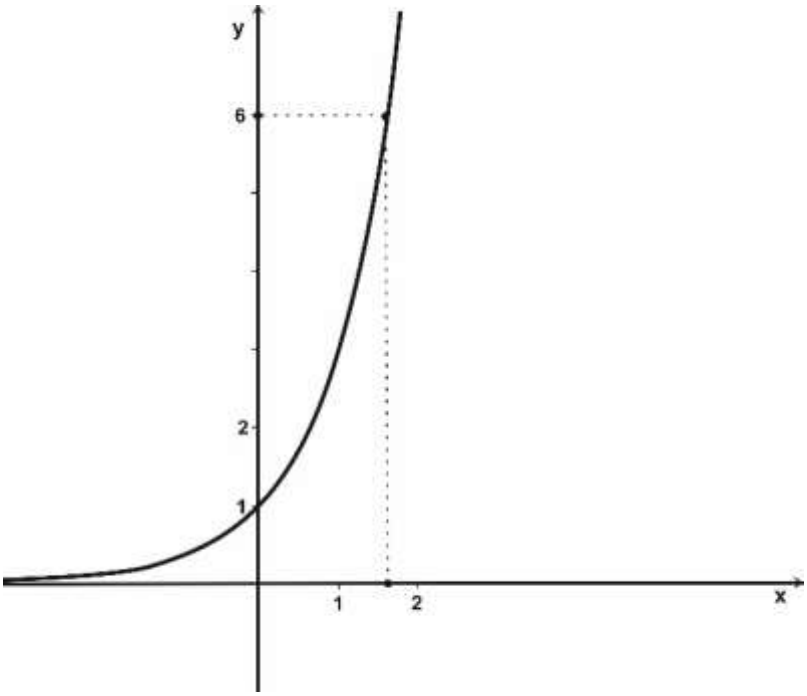
**Eksponenttiyhtälö, eksponenttifunktio ja logaritmi**

Potenssimääritelmiä ja laskusääntöjä käsitellään aluksi kurssilla muotoa $a^b$ ja $x^a$ olevien termien (missä a ja b ovat rationaalilukuarvoja ja $x$ reaalilukumuuttuja), sekä potenssi- ja juurifunktioiden kanssa. Niiden käsittelystä siirrytään muotoa $a^x$ oleviin termeihin eksponenttiyhtälöiden kautta. Eksponenttiyhtälöitä ratkaistaan aluksi päättelemällä hyödyntäen potenssin laskusääntöjä. Koska kaikkia yhtälöitä ei voi ratkaista tarkasti päättelymenetelmällä, siirrytään haarukointimenetelmään. Haarukoinnin myötä nousee kysymys siitä, onko kulloinkin haarukoitava arvo oikeasti olemassa, toisin sanoen ovatko kaikki eksponenttiyhtälöt ratkeavia. Vastauksena tähän kysymykseen johdetaan idea eksponenttifunktiosta graafisesti, alla esimerkki mukaillen Pitkä matematiikka- sarjan esitystä (Kangasaho ym. 2000):

Ilmaise luvut 9 ja 6 luvun 3 potenssina. Mitkä kaikki luvut voidaan ilmaista luvun 3 potenssina?

Ratkaisu: Luku 9 on luvun 3 neliö, eli $9=3^2$.

**Sellaista lukua x, joka toteuttaa yhtälön $6 = 3^x$, ei löydy päättelemällä.**
Eksponenttifunktion $3^x$ kuvaajan (kuva 8) perusteella eksponentti on lukujen 1,5 ja 2 välillä. Haarukoimalla tai graafisen laskimen avulla saadaan $6 \approx 3^{1,6}$.

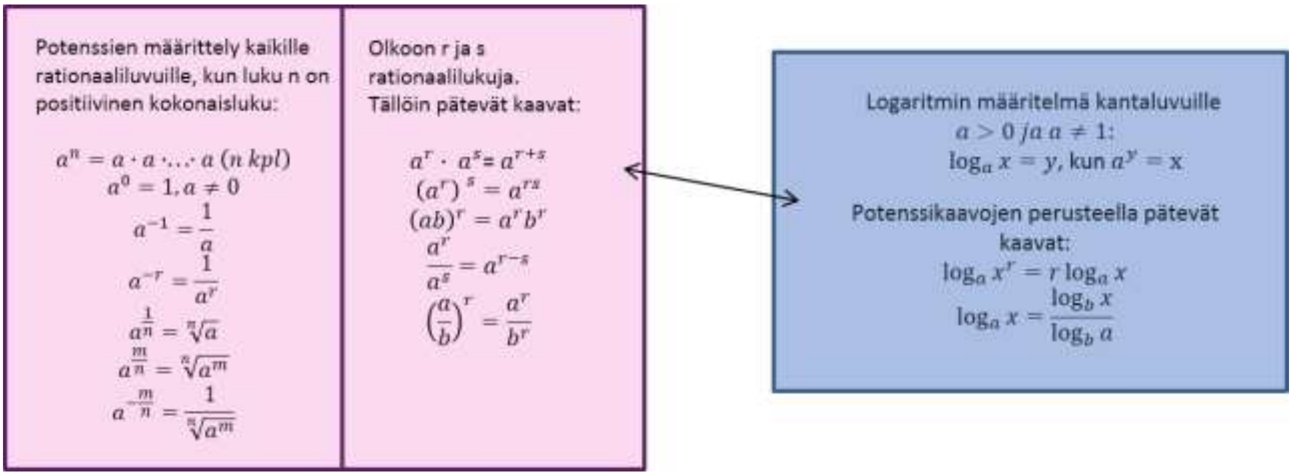



KUVA 8. LUKU 6 LUVUN 3 POTENSSINA GRAAFISESTI ESITETTYNÄ KOLMEKANTAISEN EKSPONENTTIFUNKTION KUVAAJAN AVULLA.

Eksponenttifunktio $3^x$ saa kuvaajan perusteella kaikki positiiviset arvot, joten kaikki positiiviset luvut voidaan ilmoittaa luvun 3 potenssina. Lukua 0 ja negatiivisia lukuja taas ei voida ilmaista luvun 3 potensseina, sillä näitä arvoja funktio $3^x$ei saa.

Johtopäätöksenä edellisestä todetaan, että jokainen luku $y > 0$ voidaan esittää minkä tahansa positiivisen luvun potenssina, toisin sanoen eksponenttiyhtälöllä $a^x = y, y > 0$ on aina ratkaisu. Tämä ratkaisu määritellään luvun $y$ a-kantaiseksi logaritmiksi $x = \log_a y, y > 0$. Aihepiirin käsittely täydentyy vielä eksponenttiyhtälöiden ratkaisemisessa hyödyllisellä kahdella logaritmikaavalla (kuva 9).

Kuitenkin tässä oikaistaan iso mutka, sillä irrationaalilukujen kohdalla ei olisi tähän mennessä esitellyn teorian perusteella lainkaan arvoja. Hamdan (2008) esittää, että vaikka kyseessä ei ole matemaattisesti täsmällinen määrittelytapa, opiskelijoiden kohdatessa logaritmin määritelmän ensimmäistä kertaa se on jo ”enemmän kuin tarpeeksi”.  Looginen määritelmästä teoreemaan kulkeva lähestymistapa olisi hänen mukaan täysin sopimaton tähän opiskeluvaiheeseen. Tämän menetelmän, vaikkakin matemaattisesti vajavaisen, vahvuus on konkreettisuus. Kuvaajan silottamisen (Hamdan käyttää sanaa *smoothing*)) perusteella on mahdollista antaa intuitiivisesti tyydyttävä perustelu aiemmin määritellyille abstrakteille negatiivisia ja murtolukumuotoisia eksponentteja koskeville kaavoille (Hamdan 2008).



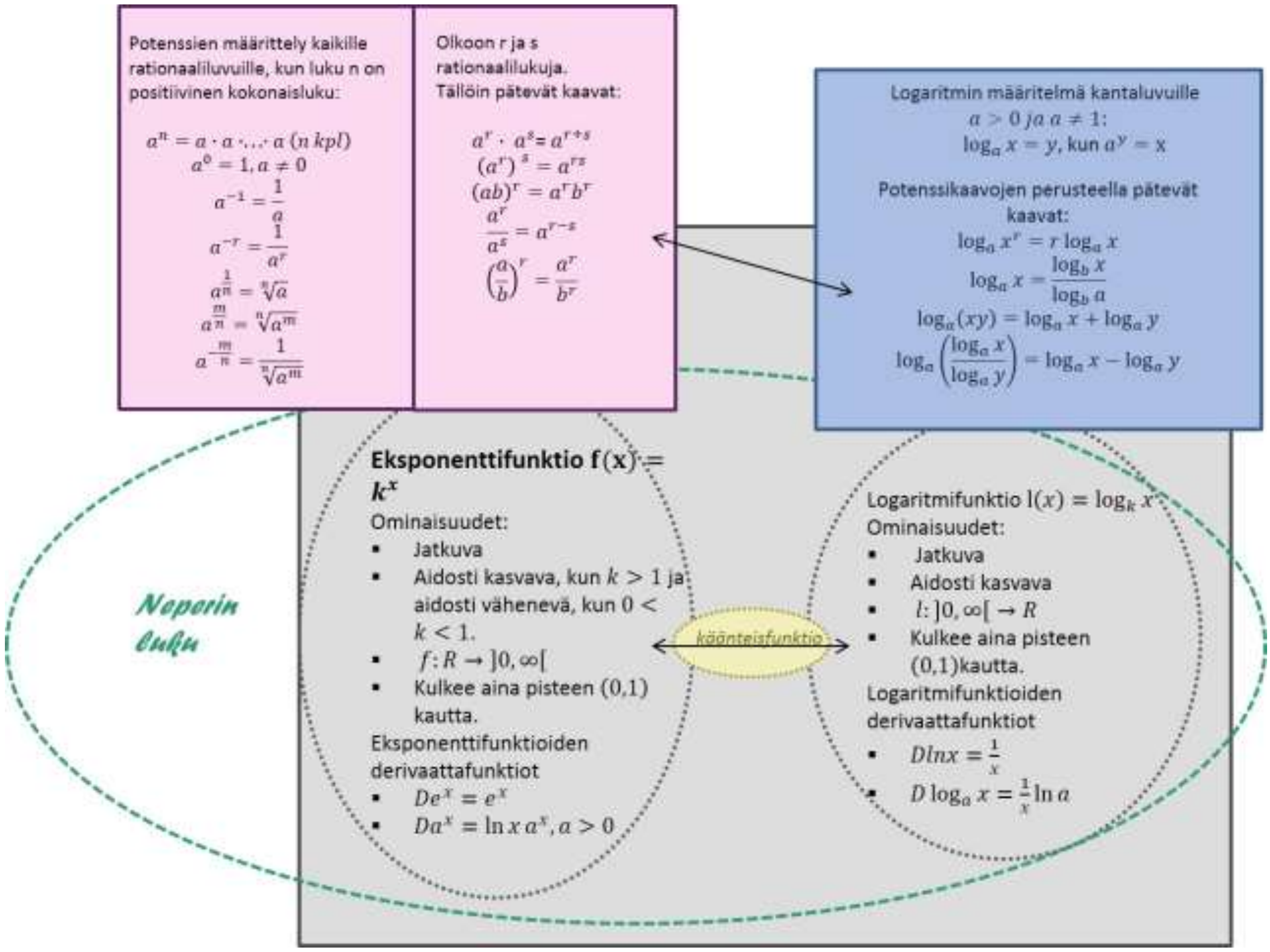

**KUVA 9. POTENSSIEN JA LOGARITMIN MÄÄRITELMÄT, SEKÄ NIILLE PÄTEVÄT LASKUKAAVAT.**

### 3.1.1 Eksponenttifunktio kurssilla juuri- ja logaritmifunktiot

Lukion toisen vuoden puolessa välissä käytävällä ”juuri- ja logaritmifunktiot” -kurssilla eksponenttifunktioon palataan. Seuraavassa osiossa tarkastellaan kurssin aiheeseen liittyviä sisältöjä kirjasarjojen *Pyramidi* (Kontkanen ym. 2006) ja *Pitkä matematiikka* (Kangasaho ym. 2006) teoriatekstien näkökulmasta. Aihepiiri laajenee logaritmifunktiolla, logaritmin tulo- ja osamääräkaavoilla, neperin luvulla ja eksponentti- ja logaritmifunktioiden derivaattafunktioilla (kuva 10). Kuvaan on piirretty katkoviivoin ne käsitteet, jotka jäävät matemaattisilta ominaisuuksiltaan osittain hämärän peittoon. Esimerkiksi eksponentti- ja logaritmifunktio on siksi ympäröity katkoviivoin, koska niiden koko määrittelyjoukolle ei ole kyetty määrittämään arvoja, kuten edellisessä osiossa todettiin.

**Eksponentti- ja logaritmifunktio**

Kahdeksannella kurssilla opetuksessa on mukana myös differentiaalilaskenta, joten funktioiden ominaisuuksien tarkastelu on suuremmassa roolissa kuin ensimmäisellä kurssilla. Esimerkiksi Pyramidissa todistetaan täsmällisesti eksponenttifunktion jatkuvuus. Syventävässä lisämateriaalissa todistetaan, että eksponenttifunktio on




KUVA 10. EKSPONENTTIFUNKTION AIHEPIIRIIN LIITTYVÄT PITKÄN MATEMATIIKAN SISÄLLÖT.

jatkuva kohdassa $x = 0$. Kurssiin kuuluvassa teoriaosuudessa tätä tulosta hyödyntäen todistetaan, että funktio on kaikkialla jatkuva osoittamalla $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Eksponenttifunktion tarkastelun jälkeen kirjoissa esitellään uutena asiana logaritmifunktio logaritmin määritelmästä käsin. Logaritmifunktiosta johdetaan ja luetellaan logaritmifunktion ominaisuudet, sekä johdetaan (loput) logaritmien laskukaavat potenssien laskusäännöillä. Pyramidissa nostetaan esiin havainto eksponentti- ja logaritmifunktion käänteisfunktiosuhteesta, mitä taas Pitkässä matematiikassa ei tehdä. Pitkässä matematiikassa käänteisfunktio käsitellään vasta viimeisenä, kun Pyramidissa taas aivan ensimmäisten asioiden joukossa.

**Eksponentti- ja logaritmifunktioiden derivaattafunktiot**

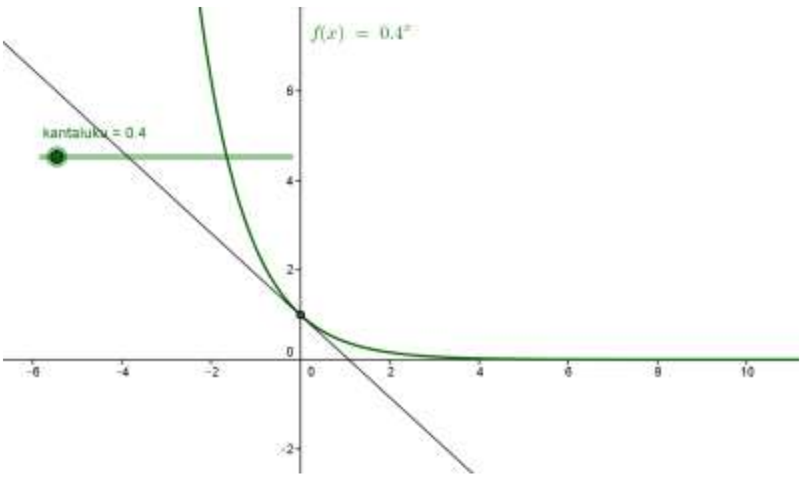
Funktioiden tultua esitellyksi siirrytään johtamaan niiden derivaattafunktiot. Työn tavoitteessa olevan opetuskokonaisuuden sisältöihin derivaattafunktiot eivät oleellisesti sisälly. Seuraavaksi esiteltävät kirjoissa esiintyvät menetelmät käsitellä eksponenttifunktiota ovat kuitenkin hyvin samankaltaisia, kuin mitä lopullisessa opetuskokonaisuudessa käytetään. Huomattavaa on myös, että eksponenttifunktion $e^x$ derivaattafunktion $De^x = e^x$ perustelussa on kummassakin kirjassa mukana päättely, joka sisältyy myös luvussa 4 esiteltävään eksponenttifunktion matemaattisesti tarkkaan konstruktion:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = f(x) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{a^{0+h} - a^0}{h}$$
$$= f(x) \cdot f'(0) \qquad (*).$$

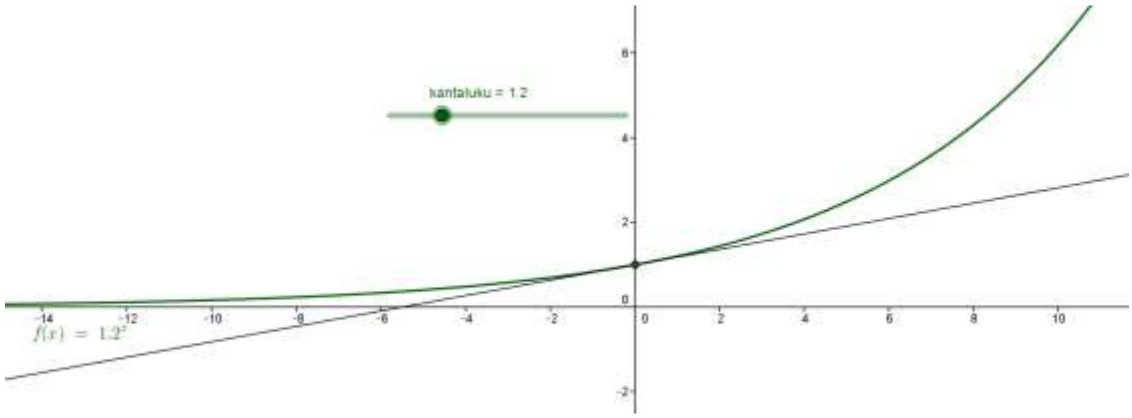
Erikseen osoitetaan, että on olemassa sellainen eksponenttifunktion kantaluku, että pätee $f'(0) = 1$ ja että tätä kyseistä lukua nimitetään matematiikassa neperin luvuksi.

Pitkä matematiikka kirjassa lähestytään asiaa johtamalla havaintojen kautta sääntö $f'(x) = f(x) \cdot f'(0)$ tutkimalla funktiota $2^x$, taulukoimalla sen arvoja ja sen likimääräisten erotusosamäärien raja-arvoja ja näiden kahden suhdetta $\frac{f'(x)}{f(x)}$. Taulukon perusteella havaitaan suhteen olevan vakio ja yhtä suuri kuin $f'(0)$. Tämän jälkeen niin ikään tutkimustehtävän kautta etsitään sellainen eksponenttifunktio, jolle pätee $f'(0) = 1$, jolloin tälle eksponenttifunktiolle pätee $f'(x) = f(x) \cdot 1$.

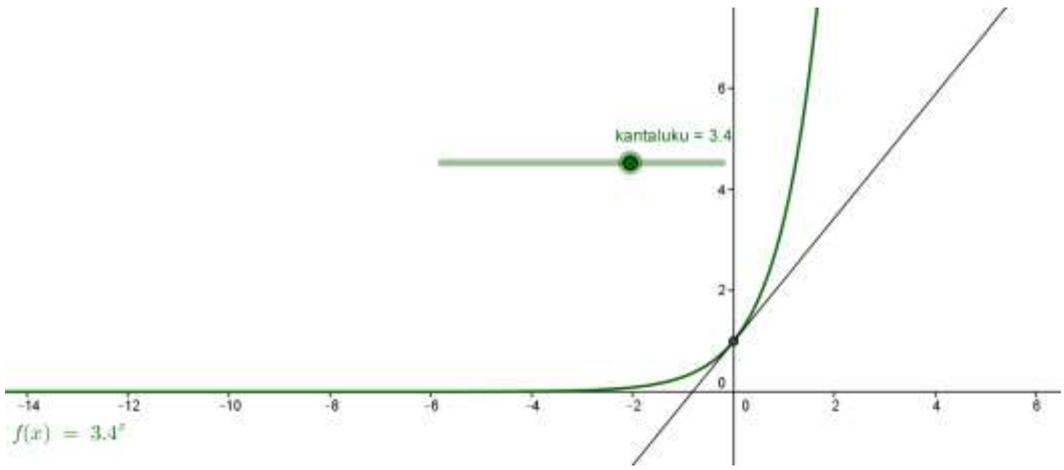
Pyramidissa lähdetään liikkeelle niin ikään havainnoinnilla, mutta etenemisjärjestys on päinvastainen. Aluksi havaitaan, että on olemassa eksponenttifunktio, jolle pätee $f'(0) = 1$ tutkimalla graafisesti käyrän tangentin kulmakerrointa kohdassa 0 eri kantaluvuilla, toisin sanoen erotusosamäärää $f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$ (kuvat 11, 12, 13 ja 14). Kuvaajan perusteella havaitaan, että tangentin kulmakerroin käy läpi kaikki reaaliarvot nollaa lukuun ottamatta, eli on olemassa eksponenttifunktio, jonka derivaattafunktion arvo kohdassa nolla on yksi. Tämän jälkeen todistetaan yhtälöketjulla $(*)$, että tämän eksponenttifunktion derivaattafunktio on funktio itse.



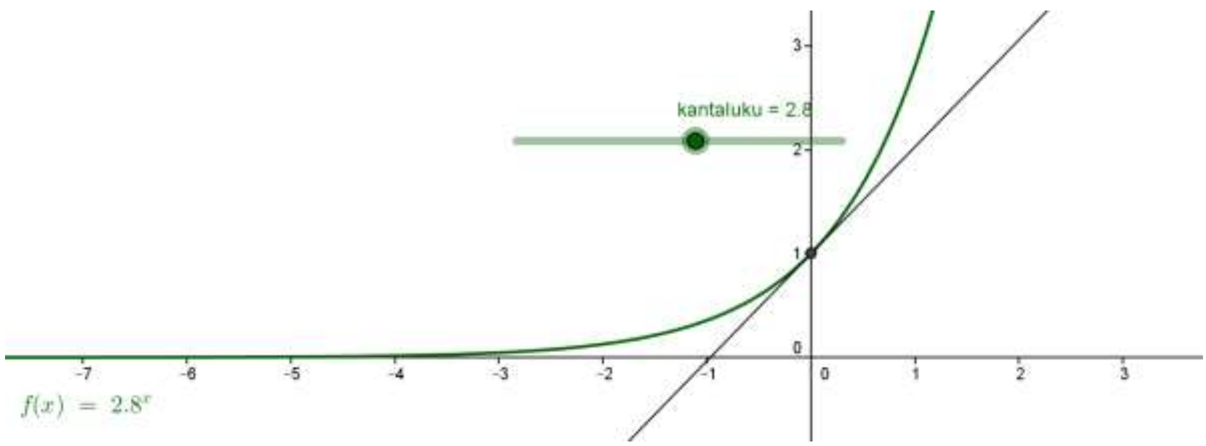

**KUVA 11. TANGENTIN KULMAKERROIN KOHDASSA NOLLA ON NEGATIIVINEN, KUN KANTALUKU ON 0,4. LIU'UTTAMALLA "KANTALUKU" –SÄÄDINTÄ, HAVAITAAN, ETTÄ KULMAKERROIN ON NEGATIIVINEN AINA, KUN KANTALUKU ON PIENEMPÄÄ KUIN YKSI.**




**KUVA 12. TANGENTIN KULMAKERROIN KOHDASSA O ON POSITIIVINEN, MUTTA MELKO LOIVA KANTALUVUN OLLESSA HIEMAN PÄÄLLE 1. TANGENTTI JYRKKENEE KANTALUKUA SUURENNETTAESSA.**




**KUVA 13. KUVAAJAN PERUSTEELLA TANGENTIN KULMAKERROIN KÄY LÄPI KAIKKI (TARKASTELUVÄLIN) REAALILUVUT.**




**KUVA 14. SÄÄDETÄÄN KANTALUKUA SITEN, ETTÄ TANGENTIN KULMAKERROIN ON TASAN YKSI, JOLLOIN $f'(0) = 1$ JA KANTALUKU ON NOIN 2,8.**

Loppukurssin ajan käsitellään tästä löydetystä derivaattafunktiosta käsin johdettavia muiden eksponenttifunktioiden derivointikaavoja sekä logaritmifunktioiden derivointikaavoja ja kirjassa Pitkä matematiikka ihan viimeisenä käänteisfunktio.

## 3.2 Tutkimushistoriaa

Tämän osion tarkoitus on selvittää, minkälaisia ongelmia pitkän matematiikan eksponenttifunktiokäsitteen oppimiseen liittyy. Tähän kysymykseen vastaavat omalta osaltaan seuraavaksi esiteltävät artikkelit. Eksponenttifunktiota on toistaiseksi tutkittu oppimisen ja opetuksen näkökulmasta vähän (Weber 2002a ja Pitta-Patazzi ym. 2007). Tähän poimitut artikkelit antavat kuitenkin arvokkaita esimerkkejä mahdollisista aihepiiriin liittyvistä ajattelutavoista ja ongelmista niiden oppimiseen liittyen.

### 3.2.1 Potenssit ja rationaalilukueksponentit

Ensimmäisenä pitkän matematiikan edetessä eksponenttifunktion aihepiiri tulee käsittelyyn potenssien myötä. Seuraavaksi esitellään artikkelia, jossa kyproslaisen yliopiston kasvatustieteilijät Demetra Pitta-Pantazi, Constantinos Christou ja Theodossios Zachariades (2007) tutkivat potenssien ymmärtämistä. Heidän tutkimuksensa tutkimushenkilöt ovat juuri opiskelleet edellisessä osiossa pitkän matematiikan aihepiiriin liittyvät ensimmäisen kurssin asiat (potenssien määritelmät, potenssien laskusäännöt, eksponenttiyhtälön ratkaisu logaritmilla), mutta eivät vielä kahdeksannen kurssin asioita (eksponentti- ja logaritmifunktio ja niiden derivaattafunktiot).

Tutkimuksessa teetettiin tehtäväpaperi kyproslaisen keskiluokkaisen alueen lukiolaisille, jossa piti valita yksi merkeistä $<, =, >$ kahden potenssin väliin ja perustella valintansa. Tehtäväpaperin kahdestakymmenestä tehtävästä (taulukko 1) ainoastaan neljä vastasi puhtaasti eksponenttifunktiota, tehtävät 1, 3, 5 ja 7 ( $0{,}5^{25}$, …, $0{,}5^{31}$, $0{,}5^{-14}$, …, $0{,}5^{-23}$, $23^{8}$, …, $23^{13}$ ja $23^{-8}$, …, $23^{-13}$). Muiden tehtävien tilanne vastasi joko potenssifunktion $x^a$ kahta arvoa kuten tehtävä 13 $0{,}7^8$, …, $0{,}4^8$. Tehtävän asetelman voi soveltaa eksponenttifunktioon ajatellen ne kahden eri eksponenttifunktion yksittäisinä arvoina $a^x$ ja $b^x$. Joukossa oli myös tehtäviä, joissa esiintyi negatiivisia kantalukuja, esimerkiksi tehtävä 4 $-0{,}3^{35}$, …, $-0{,}3^{43}$. Jälkimmäiset eivät määritelmän perusteella liity eksponenttifunktioon, joten negatiivisia kantalukuja sisältäneet tehtävät jätetään tässä yhteydessä tarkastelun ulkopuolelle. Tutkimushenkilöt (n=202) sijoitettiin testin yhteispisteiden perusteella kolmeen ryhmään*,* heikoimmin suoriutuneet ensimmäiseen ryhmään (n=52), keskivertaisesti suoriutuneet toiseen ryhmään (n=125) ja parhaiten suoriutuneet kolmanteen ryhmään (n=25). Testin perusteella valittiin eri ryhmistä vielä 30 tutkimushenkilöä haastateltaviksi. Taulukossa (taulukko 1) on tutkimustulokset eksponenttifunktioon liittyvistä tehtävistä ja alla niihin liittyviä poimintoja haastatteluista.

**TAULUKKO 1. TUTKIMUKSESSA (PITTA-PANTAZI YM 2007) TEETETYN TESTIN TULOKSET.**

| Tehtävät, joissa eksponenttifunktio | Kumpi potensseista on suurempi? Merkitse <,= tai >. | Oikein vastanneiden prosentti ryhmässä 1. | Oikein vastanneiden prosentti ryhmässä 2. | Oikein vastanneiden prosentti ryhmässä 3. |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $23^{8}$, …, $23^{13}$ | 97,6 | 97,4 | 99,2 |
| 3 | $0.5^{25}$, …, $0.5^{31}$ | 14,3 | 49,3 | 62,1 |
| 5 | $23^{-8}$, …, $23^{-13}$ | 31 | 83,6 | 94,7 |
| 7 | $0.5^{-14}$, …, $0.5^{-23}$ | 40,3 | 57,1 | 61,2 |
| 13 | $0.7^{8}$, …, $0.4^{8}$ | 61,9 | 67,2 | 84,2 |
| 14 | $0.5^{-15}$, …, $0.6^{-15}$ | 26,2 | 42,6 | 94,7 |
| 17 | $24^{3/5}$, …, $15^{3/5}$ | 81 | 86,1 | 94,7 |
| 18 | $17^{(-3/5)}$, …, $15^{(-3/5)}$ | 21,4 | 59,8 | 84,2 |
| 19 | $0.7^{5/7}$, …, $0.4^{5/7}$ | 66,7 | 62,3 | 71,1 |
| 20 | $0.3^{(-3/5)}$, …, $0.5^{(-3/5)}$ | 21,4 | 47,5 | 81,6 |

***Tehtävät 1 ja 5 ($23^{8}$, …, $23^{13}$ ja $23^{-8}$, …, $23^{-13}$)***

Tehtävän $23^{8}$, …, $23^{13}$ onnistumisprosentti oli kaikilla ryhmillä vähintään 97,4, joten positiiviset kokonaislukueksponentit oli omaksuttu ongelmitta. Negatiivisten kokonaislukueksponenttien kanssa yleisesti huonoiten suoriutunut ryhmä erosi muista ryhmistä. Haastatteluista selvisi, että heikoimmin suoriutuneeseen ryhmään kuuluneet henkilöt pitivät negatiivisia eksponentteja koskevaa laskusääntöä mielivaltaisena sopimuskysymyksenä. Paremmin suoriutuneiden ryhmien jäsenet sen sijaan ymmärsivät negatiivista eksponenttia koskevan säännön loogisena seurauksena potenssien määritelmistä.

***Tehtävät 3 ja 7 ($0.5^{25}$, …, $0.5^{31}$ ja $0.5^{-14}$, …, $0.5^{-23}$ )***

Tehtävä $0{,}5^{25}$, …, $0{,}5^{31}$ tuotti keskimmäisenkin ryhmän henkilöille vaikeuksia (oikeita vastauksia 49,3 %) ja ensimmäiselle ryhmälle entistä suurempia vaikeuksia (oikeita vastauksia 14,3 %). Parhaimmassa ryhmässäkin tehtävään oli vastannut oikein vain 62,1 prosenttia. Tehtävästä $0{,}5^{-14}$, …, $0{,}5^{-23}$ suoriutuminen oli kaiken kaikkiaan melko samaa tasoa (heikoimmin suoriutuneet 40,3 %, keskimmäinen ryhmä 57,1 % ja menestynein ryhmä 61,2 %). Nollan ja luvun yksi välissä olevien kantalukujen kanssa osaaminen oli siis melko heikkoa jokaisella ryhmällä.

***Tehtävät, joissa esiintyi murtolukueksponentti, esimerkiksi $24^{3/5}$…$15^{3/5}$***

Murtolukueksponentteja sisältäviä tehtäviä oli testissä neljä, tehtävät 17, 18, 19 ja 20. Näiden tehtävät erottivat selkeästi parhaimman ryhmän muista ryhmistä. Tehtävissä 18 ja 20 keskimmäisen ja parhaimman ryhmän ero oli jopa 24,4 ja 34,1 prosenttiyksikköä. Haastattelujen perusteella tutkijat olivat sitä mieltä, että parhaiten suoriutuneimman ryhmän jäsenet olivat ”muodostaneet omakohtaisen merkityksen murtolukumuotoisen eksponentin sisältäville potensseille ja he kykenivät myös kysyttäessä perustelemaan sen matemaattisesti (Pitta-Pantazi ym 2007, s. 307)”. Onnistumisprosentti oli suhteellisen suuri myös yleisesti heikoimmin suoriutuneiden ryhmässä tehtävissä 17 (81 %) ja 19 (66,7 %). Perusteluista tutkijat kuitenkin päättelivät, että positiivisten kokonaislukujen toistuvan kertomisen mukainen perusproseduuri oli vain sattumalta johtanut näitä opiskelijoita oikeaan tulokseen. Esimerkkinä tällaisesta perustelusta on, että ”koska $24 > 15$ ja niillä on sama eksponentti, niin myös $24^{\frac{3}{5}} > 15^{\frac{3}{5}}$.

Tutkimushenkilöinä olleille lukiolaisille vaikeimpia olivat siis tehtävät, joissa kantaluku oli lukujen nolla ja yksi välissä. Vaikeita olivat myös murtolukueksponentit, lukuun ottamatta parhaimman ryhmän oppilaita. Negatiiviset murtoluvut tuottivat hankaluuksia yleisesti heikoiten suoriutuneiden ryhmässä.

### 3.2.2 Eksponenttifunktio

Seuraavaksi esiteltävän tutkimuksen (Weber 2002a) aihepiirit ovat yhteneviä lukion kahdeksannen kurssin eksponenttifunktiota koskevien asioiden kanssa. Yhtälönratkaisun ja yksittäisten arvojen käsittelyn sijaan kohteena on eksponentti- ja logaritmifunktiot funktioina. Weberin tutkimukseen oli haastateltu viittätoista yliopistossa analyysin alkeiskurssia suorittavaa opiskelijaa tarkoituksena selvittää oppilaiden eksponenttifunktiota koskevaa ymmärrystä. Ymmärryksen kehittymistä Weber mallintaa APOS – teorian avulla. Tähän malliin tullaan palaamaan käsiteltäessä tutkimuskysymystä koskien sitä, kuinka tämän työn tavoitteena olevaan oppimiskokonaisuuteen liittyvät tavoitteet mahdollisesti saavutetaan.

Weberin mukaan eksponenttifunktioon $b^x$ liittyvä toiminta on laskutoimituksen ”b kerrottuna $x$ kertaa itsellään” suorittamista (taulukko 2). Tällä toiminnolla on mahdollista määrittää eksponenttifunktion arvoja ainoastaan positiivisilla kokonaislukumuuttujilla. Esimerkiksi termiä $2^{-5}$ ei ole mahdollista käsitellä toiminnon ”luku kaksi kerrottuna miinus viisi kertaa itsellään”. Prosessivaiheessa taas henkilö ymmärtää eksponenttifunktion funktiona. Hän kykenee kuvailemaan, millainen funktio on $2^x$ tai $\frac{1}{2}^x$ ilman konkreettisen toiminnan suorittamista. Funktio-ominaisuuksien ymmärtämisen kautta on mahdollista antaa merkitys edellä olleelle luvulle $2^{-5}$. Prosessiymmärryksen kehittymisen myötä on myös mahdollista ymmärtää eksponenttifunktioon liittyvä käänteinen prosessi, eli logaritmifunktio.

TAULUKKO 2. EKSPONENTTIFUNKTIOKÄSITTEEN MUODOSTUKSEN VAIHEET WEBERIN (2002A) MUKAAN.

| **EKSPONENTTIFUNKTIO** | |
|---|---|
| ***toimintana*** | • arvon $b^x$ laskemista kertomalla b x kertaa itsellään |
| ***prosessina*** | • $b^x$ on funktio, esimerkiksi $2^x$. Osaa selittää millainen funktio se on ja perustella sen ominaisuudet.<br>• Ymmärrys termistä $b^x$ funktiona on välttämätön logaritmifunktion ymmärtämisen kannalta. |
| ***objektina*** | • Esimerkiksi $2^3$ on laskutoimitus $2 \cdot 2 \cdot 2$, mutta myös muokattava objekti (luku, joka on laskutoimituksen $2 \cdot 2 \cdot 2$ tulos). |
| ***eksponenttifunktiokäsitteen yleistyminen*** | • Kykenee perustelemaan kaikki eksponenttifunktion arvot. |

Siirrytään seuraavaksi siihen, mitä Weberin mukaan tarkoittaa eksponenttifunktion ymmärtäminen objektina. Ymmärtääkseen eksponenttifunktion objektina, on ymmärrettävä termi $2^3$ kahdella tavalla. Se on ymmärrettävä laskutoimituksena $2 \cdot 2 \cdot 2$, mutta sen lisäksi myös lukuna, joka on sama kuin laskutoimituksen $2 \cdot 2 \cdot 2$ tulos. Vastaavasti $\log_2 8$ on yhtälön $2^x = 8$ ratkaisu, mutta myös se luku, kuinka monta kertaa luku 2 on kerrottava itsellään saadakseen luvun 8. Useassa yhteydessä on havaittu oppilailla olevan tämän hahmottamisen kanssa ongelmia (Weber 2002a, s. → Sfard 1991). Henkilön eksponenttifunktioskeeman yleistyminen olisi Weberin mukaan se, että henkilö kykenee perustelemaan eksponenttifunktion arvot kaikille reaaliluvuille, ”jopa irrationaaliluvuille”. Tällöin kykenee esimerkiksi selittämään, miksi on $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ (Weber 2002a, s. 4). Irrationaalilukuja koskevia haastattelukysymyksiä tai –tehtäviä tutkimuksessa ei kuitenkaan esiinny.

Tutkimushenkilöt (n=15) olivat juuri opiskelleet eksponentti- ja logaritmifunktioihin liittyviä aiheita analyysin johdantokurssilla yhdysvaltalaisessa yliopistossa noin kolme viikkoa. He olivat siis ehkä edistyneempiä, kuin pitkän matematiikan kahdeksatta kurssia käyvät oppilaat. Tutkimuksen haastatteluissa kysytyt kysymykset olivat kuitenkin monilta osin lukion pitkän matematiikan tasolla. Heiltä kysyttiin eksponenttifunktion perusominaisuuksista, perusteluja niille, avoimia käsitteellisempää tietoa koskevia kysymyksiä, sekä heille teetettiin niin tyypillisiä oppikirjojen perustehtäviä kuin soveltavampiakin tehtäviä. Seuraavaan on koottu haastatteluissa esiintyneitä kysymyksiä, sekä vastauksia niihin.

*Kuinka selittäisit, mitä tarkoittaa f (x) = $a^x$?*

- Kaksi vastausta sisälsi prosessiajattelun: ”lukua a kerrotaan x kertaa itsellään”.
- Loppujen kahdentoista vastaukset noudattivat vastausta ”joku tietty luku on korotettu johonkin potenssiin”. Haastattelijan pyytäessä erittelemään tarkemmin tai kertomaan jotain lisää, kukaan näistä kahdestatoista ei osannut antaa muunlaista lisäselvitystä, kuin esimerkin jollakin yksittäisellä arvolla.

*Onko funktio f(x)=$(1/2)^x$ vähenevä vai kasvava funktio?*

- Kaikki viisitoista vastasivat oikein.
- Vain kaksi osasi antaa matemaattisen perustelun: nimittäjä kasvaa osoittajan säilyessä, kun muuttujan arvot suurenevat, joten funktio on vähenevä. Tällainen vastaus kertoo Weberin mukaan prosessitason ymmärryksestä koskien funktiota ja eksponenttifunktiota.
- Loput eivät kyenneet osoittamaan, että funktio pienenee loputtomasti. Pienenemistä perusteltiin yksittäisten arvojen laskemisella tai muistinvaraisella säännöllä siitä, että eksponenttifunktio pienenee, kun sen kantaluku on pienempää kuin yksi.

Kahta haastateltavaa lukuun ottamatta kenenkään muun ei siis voi vastausten perusteella olettaa ymmärtäneen eksponenttifunktiota prosessina. Yksi kysymys koski logaritmifunktiota. Haastateltavalta kysyttiin, kuinka hän laskisi arvon $\log_5 78125$ ilman laskinta. Osatakseen vastata kysymykseen, olisi välttämätöntä ymmärtää eksponenttifunktio prosessina ja sen lisäksi kyetä kääntämään se. Kyseinen käänteinen prosessi on, että ratkaisee yhtälön $5^x = 78125$ jakamalla lukua 78125 luvulla 5. Toki oikeaan vastaukseen johtaa yhtä lailla järjestelmällinen eksponentin kokeilu $5^1, 5^2, 5^3$ ...

*Oletetaan, ettei käytössäsi olisi laskinta. Kuinka laskisit arvon $\log_5 78125$?*

- Kukaan oppilaista ei osannut ehdottaa edellä mainituista tavoista ensimmäistä.
- Neljä oppilasta osasi muodostaa yhtälön $5^x = 78125$ ja tiesi, että yhtälön ratkaisu on haluttu luku $\log_5 78125$. Ratkaisuksi ei osattu ehdottaa muuta kuin eri lukujen kokeilemista.
- Kolme opiskelijaa luuli vastauksen olevan $\sqrt[5]{78125}$.
- Loput kahdeksan eivät osanneet ehdottaa mitään tapaa arvon laskemiseksi.

Nämä vastaukset koskien logaritmifunktiota ovat samoilla linjoilla edellisten kysymysten kanssa: suurin osa oppilaista ei ymmärtänyt eksponenttifunktiota prosessina. Tutkimuskysymysten vierestä Weber halusi myös raportoida sen, että tutkimushenkilöistä vain kuusi viidestätoista oli muistanut kaavan $\log_b x + \log_b y = \log_b xy$ ja samoin vain kuusi kaavan $b^{x+y}$= $b^x b^y$. Kukaan oppilaista ei ollut oivaltanut yhteyttä näiden sääntöjen välillä tai muuten perustella niitä. Johtopäätöksenä todetaan, että suurin osa opiskelijoista ei ollut onnistunut edistymään toimintatasoa pidemmälle aihepiirin osalta.

Weber suunnitteli myös opiskelukokonaisuuden hypoteesinsa pohjalta, sekä kokeili sitä käytännössä (Weber 2002b). Hän testasi kokeilun oppimistuloksia vertaamalla niitä perinteisemmän opetuksen saaneeseen opiskelijaryhmään ja raportoi tuloksista samassa artikkelissa. Opiskelukokonaisuus koostui kahdesta osasta. Ensimmäisen tarkoitus oli kehittää eksponenttifunktioon liittyvää prosessiajattelua tekemällä MAPLE- ohjelmalla taulukoita eksponenttifunktion arvoista. Toisessa osiossa tehtiin harjoitusmonistetehtäviä, joiden tarkoitus oli kehittää ymmärrystä eksponenttifunktiosta objektina. Tehtävät olivat kaikki samaa tyyppiä, joissa piti annettua ilmaisua kuvata sekä tulona, että sanallisesti. Esimerkiksi tehtävään $b^x$ tavoitteena oppilaan saavuttamaksi ratkaisuksi olisi $b^x = b \cdot b \cdot \ldots (x\ kertaa) =$ *”luku, joka on luku b kerrottuna x kertaa itsellään”* ja tehtävään $b \cdot b^x = b \cdot \left(b \cdot b \cdot \ldots (x\ kertaa)\right) = b \cdot b \cdot \ldots (x + 1\ kertaa) = b^{x+1} =$ ”lukujen b ja sen luvun, joka on b kerrottuna itsellään b kertaa, tulo on sama kuin luku, joka on b kerrottuna x+1 kertaa itsellään”.

Tulokset olivat rohkaisevia. Kokeiluryhmä menestyi vertailuryhmään verrattuna paremmin kokeilun jälkeen teetetyssä kokeessa. Tuloksen luotettavuutta kuitenkin heikentää Weberin mukaan se, että hän oli samanaikaisesti kurssin pääarvostelija ja opetti kokeiluryhmää. Se nosti todennäköisesti kokeiluryhmän motivaatioita. Vertailuryhmää opetti samanaikaisesti sijainen, joka ei ollut yhtä rutinoitunut opettamaan kyseisen kurssin asioita.

### 3.2.3 Tutkimus: funktio prosessina

Weber (2002a ja b) totesi, että tutkimushenkilöt eivät ymmärtäneet eksponenttifunktiota prosessina ja samoilla linjoilla ovat Daniel Braidenbach, Ed Dubinsky, Julie Hawks ja Devilyna Nichols koskien ymmärrystä funktiosta yleisesti tekemässään tutkimuksessa (1992). Heidän funktiokäsitteen kehittymistä koskevan tutkimuksen tuloksena on, että tutkimushenkilöt eivät ymmärtäneet funktiota prosessina, vaikka he olivat opiskelleet koko lukion matematiikan oppisisällöt.

Funktiokäsite on tämän työn kohteena olevassa eksponenttifunktion määritelmässä hyvin keskeisessä osassa ja siksi kyseinen tutkimustulos on mielenkiintoinen tämän työn tavoitteita ajatellen. Tämän hyödyllisen tutkimustuloksen lisäksi artikkelissa on erinomainen jäsentely APOS-teorian vaiheista koskien funktiokäsitteen kehittymistä. Funktiokäsitteen kehitys jaetaan siinä neljään vaiheeseen: funktiokäsitteen esivaiheeseen, toimintavaiheeseen, prosessivaiheeseen ja objektivaiheeseen (taulukko 3).

**TAULUKKO 3.**

| funktion käsitteenmuodostukseen liittyvä vaihe | Vaiheeseen liittyvät tiedot tai taidot |
|---|---|
| *funktiokäsitteen esiaste* | • ei hallitse funktioiden käsittelyyn vaadittavia taitoja, mutta hahmottaa joitain funktion ominaispiirteitä |
| *toiminta* | • osaa sijoittaa muuttujalle arvon funktioiden lausekkeisiin |
| *prosessi* | • kykenee käsittelemään sellaisia funktioita, joiden arvoja ei voi laskea suoraan ilman laskinta, kuten sinx ja lnx (Asiala ym. 1996)<br>• tilanteiden ymmärtäminen funktioina, vaikka muuttujat tai arvot eivät ole numeerisia, esimerkiksi totuusarvofunktio<br>• yhdistetty funktio, paloittain määritelty funktio ja käänteisfunktio |
| *objekti* | • joukko funktioita<br>• funktioiden yhteen- ja kertolasku, funktiot, jotka muuttavat funktioita toisiksi funktioiksi |

Funktiokäsitteen esivaiheeseen liittyy se, että henkilö ei osaa lainkaan funktion käsittelyyn vaadittavia toimintoja, kun taas toimintavaiheessa henkilö osaa reagoida ulkoisiin ominaisuuksiin, kuten sijoittaa muuttujan paikalle arvon ja laskea mahdollisesti myös muuttujaa vastaavan arvon. Toimintavaiheessa henkilö on kuitenkin rajoittunut pelkkien yksittäisten tapausten tarkasteluun. Seuraavat vastaukset kysymykseen ”Mikä on funktio?” tulkittiin artikkelissa kertovan funktiokäsitteen toimintatason ajattelusta. Haastateltavia oli 62 kappaletta ja he olivat ensimmäisen vuoden yliopisto-opiskelijoita, jotka olivat pääosin opiskelemassa ala- ja yläkoulun matematiikan opettajiksi.

> ”Funktio on yhtälö, jonka ratkaisu saadaan laskemalla käyttäen lukua muuttujan kirjaimen sijasta.”
> ”Funktio sisältää operaation, jonka avulla saadaan tulos.”

Prosessivaiheessa sen sijaan funktion kykenee näkemään dynaamisena kokonaisuutena. Prosessikäsityksen myötä funktioita kykenee käsittelemään ja arvioimaan ilman konkreettista manipulointia. Mark Asiala, Anne Brown, David J. DeVries, Ed Dubinsky, David Mathews ja Karen Thomas (1996) esittävät esimerkkinä tällaisista funktioista funktiot $\sin x$ ja $\ln x$.

Seuraavat vastaukset kysymykseen ”Mikä on funktio?” tulkittiin artikkelissa kertovan siitä, että henkilö ymmärtää funktion prosessina:

> ”Funktio on lauseke, jonka perusteella annettuja arvoja muutetaan toisiksi arvoiksi.”
> ”Funktio on algoritmi, joka muuntaa annetun syötteen tietynlaiseksi tulokseksi.”

Tutkimushenkilöiden esitietojen todettiin olevan suurimmaksi osaksi toimintatasolla, joten tavoitteeksi artikkelin yhteydessä tehdyssä tutkimuksessa muodostui nimenomaan funktioon liittyvän prosessikäsityksen kehittäminen. Tutkimushenkilöille teetettyyn kokeeseen oli kuitenkin suunniteltu tietoisesti tehtävä, jossa funktiot esiintyvät objekteina:

> Olkoon $F$ kaikkien sellaisten funktioiden joukko, joiden lähtö- ja maalijoukot ovat kumpikin koko reaalilukujen joukko. Olkoon D operaatio, joka muuttaa funktion $f, f\epsilon F$, funktioksi $f'$. Olkoon $K$ operaatio, joka muuttaa funktion $f, f\epsilon F$, funktioksi $h$. Funktiolle $h$ pätee $h(x) = f(-2x)$.
>
> a) Ovatko D ja K funktioita? Selitä vastauksesi. Jos eivät ole, niin kuinka muuttaisit niitä jotta ne olisivat?
> b) Jos $f\epsilon F$ ja on määritelty $f(x) = x^3$, niin mitä on silloin $K(f)(3)$?
> c) Mikä on käänteinen operaatio operaatiolle $K$?

Funktio on ajateltava objektina tässä tehtävässä artikkelin kirjoittajien mukaan sillä perusteella, että a-kohdassa on kuviteltava, kuinka operaatiot D ja K muokkaavat itse funktiota. Kohdassa b taas merkinnän $K(f)(3)$ ymmärtäminen vaatii aluksi sen hahmottamista, että ensimmäisenä muuttujana on funktio $f$, missä operaatio K muuttaa sen funktioksi $h$. Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, David ja Thomas (1996) ovat samoilla linjoilla funktion objektitason ajattelun merkeistä, joita olisi esimerkiksi kyky käsitellä funktioita joukkoina ja lisäksi vielä kyky muodostaa funktioiden keskeisiä laskutoimituksia (Asiala ym. 1996).

### 3.2.4 Yhteenveto tutkimushistoriasta

Yhteenvetona tutkimushistoriasta voi sanoa, että esiteltyjen tutkimusten tutkimushenkilöillä esiintyi vaikeuksia ymmärtää eksponenttifunktio prosessina. Weberin (2002a) tutkimustulos oli, että suurin osa tutkimushenkilöinä olleista opiskelijoista ei ollut onnistunut edistymään toimintatasoa pidemmälle eksponenttifunktion osalta. Pitta-Pantazi, Christou ja Zachariades (2007) taas havaitsivat tutkimushenkilöinä olleilla lukion toisen vuoden opiskelijoilla olevan hankaluuksia käsittää eri lukualueiden eksponentteja, kuten $a^{-n}$ ja $a^{\frac{m}{n}}$, missä $m$ ja $n$ ovat kokonaislukuja. Tämän kaltaiset yksittäisiä arvoja koskevat hahmotusongelmat hankaloittavat funktioprosessin ymmärtämistä. Lisäksi Braidenbach, Dubinsky, Hawks ja Nichols (1992) totesivat tutkimushenkilöidensä olevan toimintatasolla koskien yleisesti funktiokäsitettä. Tässä kohteena ei ollut eksponenttifunktio, mutta voi olettaa eksponenttifunktioprosessin ymmärtämiselle edellytykseksi funktioprosessin ymmärtämisen.

# 4 Eksponenttifunktion historiallinen kehitys ja kaksi modernia määritelmää

Tämän luvun tarkoitus on vastata siihen, miltä osin edellisessä luvussa pitkän matematiikan oppisisältöjen kautta esiteltynä eksponenttifunktio jäi puutteelliseksi. Lukiomatematiikan kautta tuli kyllä esiteltyä esimerkiksi eksponenttifunktion tärkeimmät ominaisuudet, kuten $De^x = e^x$, mutta itse funktio jäi kuitenkin vaillinaiseksi, sillä sille ei kyetty määrittelemään irrationaalilukuja vastaavia arvoja. Ennen kahta esimerkkiä eksponenttifunktion kaikki reaaliluvut kattavasta määrittelystä käydään läpi käsitteen historialliseen kehitykseen liittyviä vaiheita.

## 4.1 Eksponentti- ja logaritmifunktion historiaa

Eksponenttifunktion merkitys matematiikan kehityksen kannalta on suuri, sillä sen ominaisuutta samaistaa kerto- ja yhteenlasku käytettiin hyväksi laskutoimituksissa, joiden suorittaminen käsin oli työlästä ja virhealtista (Boyer & Merzbach 1994, Hamdan 2008, Panagiotou 2010, Lehtinen 2012). Tarve tehokkaammille laskentamenetelmille nousi merenkäynnin kehittymisen ja tieteiden, kuten tähtitieteen, kehittymisen myötä. Seuraavan osion modernissa määritelmässä eksponenttifunktion halutaankin olevan funktio, jolla on nimenomaan ominaisuus $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ ja logaritmifunktiolla vastaavasti ominaisuus $l(x \cdot y) = l(x) + l(y)$.

Skotlantilaista John Napieria (1550 -1617) pidetään tänä päivänä merkittävimpänä logaritmifunktion (mikä voidaan samaistaa määritelmän perusteella eksponenttifunktioon) keksijänä (Boyer & Merzbach 1994). Jo ennen Napieria matemaatikot olivat havainneet aritmeettisten ja geometristen sarjojen väliset yhteydet laskutoimituksissa (esimerkiksi Boyer & Merzbach 1994, Panagiotou 2010):

> Nicolas Chuequet (1440 -1488): Kahden samassa geometrisessa lukujonossa olevan luvun kertolasku voidaan yksinkertaistaa niiden järjestystä vastaavien luonnollisten lukujen yhteenlaskuksi.
>
> Michael Stifel (1486 - 1567): Edellisen lisäksi vastaavalla tavalla kahden geometrisessä lukujonossa olevan luvun jakaminen voidaan muuntaa vähentämiseksi, potenssien laskeminen kertolaskuksi ja juurien määrittäminen jakolaskuksi

Nämä havainnot vastaavat moderniin logaritmifunktioon liittyviä laskusääntöjä $\log(x \cdot y) = \log x + \log y$, $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$ ja $\log x^n = n \log x$, tai vastaavasti eksponenttifunktion osalta $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, $a^{x^n} = a^{xn}$. Taulukkoon, jota kutsutaan Stiefelin taulukoksi (taulukko 4), on lueteltu kaksikantaisen logaritmin arvoja ja siitä voidaan katso suoraan esimerkiksi lukujen 2 ja 4 kertolaskun tulos muuntamalla se vastaavien lukujen logaritmin yhteenlaskuksi (1+2) ja sitten katsoa, minkä luvun logaritmi kyseinen summa on. Vasta Napier ja hänen lisäkseen toinen matemaatikko Jost Burgi (1552 -1632) laskivat systemaattisesti logaritmitaulukoita laskutoimitusten suorittamista ja yksinkertaistamista varten (Boyer & Merzbach 1994).

Taulukko 4. Stiefelin taulukko luvulle 2.

| **logaritmi (eksponentti)** | **luku** |
|---|---|
| −5 | $\frac{1}{32}$ |
| −4 | $\frac{1}{16}$ |
| −3 | $\frac{1}{8}$ |
| −2 | $\frac{1}{4}$ |
| −1 | $\frac{1}{2}$ |
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 4 |
| 3 | 8 |
| 4 | 16 |
| 5 | 32 |
| 6 | 64 |

Napier kehitteli taulukoitaan ja logaritmin määritelmäänsä, nykyisen logaritmin määritelmän edeltäjää, kahdenkymmenen vuoden ajan. (Boyer & Merzbach 1994). Koska kokonaislukutaulukoissa termien väliset etäisyydet kasvavat hyvin nopeasti hyvin suuriksi, niin tarkkojen tulosten saamiseksi olisi tarvittu valtava määrä taulukoita. Tähän ongelmaan ratkaisuksi Napier valitsi suhdeluvun, joka olisi niin lähellä lukua 1, että geometrisen jonon termit pysyisivät tarpeeksi lähellä toisiaan. Aluksi Napier valitsi luvun $1 - 10^{-7}$, mutta välttääkseen turhan pitkiä desimaaleja päätti kertoa sen vielä luvulla $10^7$. Taulukkoon on laskettu seitsemää ensimmäistä logaritmia vastaavat luvut (taulukko 5). Yhteys lukuun $e$ selviää jakamalla tämän logaritmijärjestelmän logaritmi luvulla $10^7$ (toisin sanoen poistaa Napierin desimaalien muuntaminen mukavammin käsiteltävään muotoon), jolloin mahdollisimman suureksi luvuksi saadaan $\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{10^7}$, joka on hyvin lähellä lukua $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}$. (Boyer & Merzbach 1994, Lehtinen 2012).

TAULUKKO 5. NAPIERIN LOGARITMI.

| **Napierin logaritmi $L$** | **luku $N$** |
|---|---|
| 0 | $10^7(1-10^{-7})^0$ = $10^7$ |
| 1 | $10^7(1-10^{-7})^1$ = 9 999 999,0000000 |
| 2 | $10^7(1-10^{-7})^2$ = 9 999 998,0000001 |
| 3 | 9 999 997,0000003 |
| 4 | 9 999 996,0000006 |
| 5 | 9999 995,0000010 |
| ⋮ | ⋮ |
| 100 | 9 999 900,000495 |
| ⋮ | ⋮ |
| $10^7$ | $10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{10^7}$ |

Lukua $N$ vastaava Napierin logaritmi $L = Nap\ \log N$ on siten luku, jolle pätee

$$N = 10^7(1-10^{-7})^L.$$

Jotta logaritmin tulosääntö pätisi, tulisi kahden luvun $N_1$ ja $N_2$ tulon olla $N_1 \cdot N_2 = 10^7(1-10^{-7})^{L_1+L_2}$. Näin ei kuitenkaan aivan ole, sillä

$$= N_1 \cdot N_2 = 10^7(1-10^{-7})^{L_1} \cdot 10^7(1-10^{-7})^{L_2} = 10^7(10^7(\,1-10^{-7})^{L_1+L_2}\,).$$

Sama pätee myös osamäärän, potenssin ja juurten logaritmeille. Napierilla ei vielä ollut käytössään eksponenttimerkintää, joten hän ei määritellyt logaritmia funktiona, vaan geometrisesti dynaamisen mallin avulla (Boyer & Merzbach 1994). Se on kuitenkin ekvivalentti edellisten merkintöjen kanssa.

Seuraavana vuonna lontoolainen professori (ilmeisesti ensimmäinen matematiikan professori Englannissa) Henry Briggs (1561 -1630) tutustui Napierin töihin (Lehtinen 2012). He olivat yhdessä Napierin kanssa sitä mieltä, että Napierin logaritmit kannattaisi muuntaa kymmenen potensseiksi (Boyer & Merzbach 1994). Napier ei vanhuuttaan enää jaksanut ryhtyä työhön, mutta Briggs kehitti uuden järjestelmän heidän ideansa pohjalta. Aluksi hän laski lukujen 1-1000 logaritmit 14 numeron tarkkuudella ja myöhemmin vielä lukujen 1-20 000 ja 90 000-100 000 logaritmit samalla 14 numeron tarkkuudella. Näiden taulukoiden luvuille ja logaritmeille pätivät nykyisen logaritmifunktion laskusäännöt. Juuri täsmälleen tästä, mihin Napierin ja Briggsin työ päättyi, jatkaa osion 4.3 määritelmä eksponenttifunktiolle. Sitä ennen kuitenkin esitellään seuraavassa osiossa tavanomaisempi ja suoraviivaisempi määritelmä eksponenttifunktiolle. Suoraviivaisemman siitä tekee se, että määrittely ei tapahdu käänteisfunktion kautta, kuten jälkimmäisessä.

## 4.2 Eksponenttifunktion määrittely kaikille reaaliluvuille tapa 1

Ensimmäiseksi tässä esitellään tavanomaisempi ja suoraviivaisempi tapa määritellä eksponenttifunktio. Tässä esitellään vain määritelmä kantaluvulle e ja lisäksi määritelmän testaaminen jätetään tekemättä. Testaamisella tarkoitetaan sitä, että todistetaan määritellyllä funktiolla olevan kaikki halutut ominaisuudet. Näitä ovat ominaisuus samaistaa kerto- ja yhteenlasku, aidosti kasvavuus ja se, että sillä on derivaattafunktio, joka on sama kuin funktio itse. Sillä on myös oltava käänteisfunktio $\ln x$. Näiden jälkeen määritellään lopulta kaikkien eksponenttifunktioiden joukko. Tämän kaltainen määrittely eksponenttifunktiolle löytyy esimerkiksi Helsingin yliopiston kurssien Analyysi I ja II kurssikirjasta (Harjulehto ym 2014).

Eksponenttifunktion määrittely alkaa eksponenttifunktion $e^x$, $e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n \approx 2{,}7182 \ldots$ , määrittelyllä.

Aluksi havaitaan, että $e^x$ on määritelty, kun $x \in \mathbb{Q}$, perustuen aikaisempiin potensseja koskeviin määritelmiin. Näiden määritelmien perusteella todetaan, että pätee myös

$$e^{x+y} = e^x e^y$$

$$(e^x)^y = e^{xy}.$$

Näiden perusteella todetaan funktion olevan aidosti kasvava rationaalilukujen joukossa, sekä jatkuva rationaalilukujen joukossa.

Seuraavassa määritellään jokainen yksittäinen kohdassa $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ oleva funktion $e^x$ arvo olevan sen joukon supremum*, joka koostuu lukujen $r < x, r \in \mathbb{Q}$, määrittämistä arvoista $e^r$.

**Määritelmä.** Jos $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, niin

$$e^x = \sup\{e^r \mid r \in \mathbb{Q}, r < x\}.$$

Merkitään $e^x = \exp(x)$. Koska funktio $e^x$ on määritelty sekä rationaali-, että irrationaaliluvuille, niin $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

*__Määritelmä.__ Olkoon $E \subset \mathbb{R}$. Luku $G \in \mathbb{R}$ on joukon supremum eli pienin yläraja, jos se on pienin joukon $E$ ylärajoista. Tällöin merkitään $G = \sup E$.

## 4.3 Eksponenttifunktion määrittely kaikille reaaliluvuille tapa 2

Tämän seuraavan määrittelymenetelmän esittelyssä mukaillaan erityisesti kirjan *Calculus* (Spivak 1994) esitystapaa. Samankaltainen käänteisfunktion ominaisuuksiin pohjautuva esitys löytyy myös esimerkiksi kirjasta *One and several variables calculus* (Salas&Hille 1971) ja analyysin kurssikirjasta (Harjulehto ym 2014). Näistä esityksistä erityisesti Spivak muodostaa hyvin saumattoman jatkeen eksponentti- ja logaritmifunktion kehityshistorialle. Ensimmäinen modernin logaritmifunktion vastine oli Henry Briggsin John Napierin työn pohjalta kehittämä kymmenkantainen logaritmijärjestelmä, johon tämän luvun ensimmäisen osion historiakatsauksessa jäätiin. Spivakin eksponenttifunktion määrittely alkaa tämän 10-kantaisen eksponentti- ja logaritmifunktion määrittelystä. Historiaosio myös paljastaa, miksi eksponenttifunktion ominaisuus samaistaa yhteen- ja kertolasku on sille elintärkeä.

Halutaan määritellä funktio $f(x) = 10^x$, jolle pätee

$$\boldsymbol{f(x+y) = f(x) \cdot f(y)} \textbf{ kaikille } \mathbf{x \epsilon R} \textbf{ ja } \mathbf{y \epsilon R}.$$

Oletetaan, että funktiolla on käänteisfunktio ja määritellään

$$\boldsymbol{f^{-1}(x) = \log_{10} x, \quad x > 0}.$$

### 4.3.1 Eksponenttifunktion määrittely rationaaliluvuille

Aluksi eksponenttifunktio määritellään algebrallisesti kaikille rationaaliluvuille, vastaavalla tavalla kuin lukiomatematiikassa tehdään. Vaikka tällä menetelmällä ei voida perustella esimerkiksi arvoa $f(\pi)= 10^\pi$, niin funktion rationaalilukujen yksittäisiä arvoja tarvitaan edetessä kaikki reaaliluvut kattavaan määritelmään. Seuraavassa käydään kohdittain läpi potenssimääritelmät rationaalisille eksponenteille positiivisista kokonaisluvuista aloittaen ja tarkistaen, että määritelmä on ekvivalentti yhtälön $10^x \cdot 10^y = 10^{x+y}$ kanssa.

Olkoon x rationaaliluku. Jos $n$ ja $m$ ovat positiivisia kokonaislukuja ja

1) $x = n$ , määritellään

$$10^n = \underbrace{10 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 10}_{n\ kappaletta}, \text{ jolloin}$$

$$10^m \cdot 10^n = \underbrace{10 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 10}_{m\ kappaletta} \cdot \underbrace{10 \cdot \ldots \cdot 10}_{n\ kappaletta} = 10^{m+n} .$$

2) $x = 0$, määritellään $10^0 = 1$, jolloin $10^0 \cdot 10^n = 1 \cdot 10^n = 10^{0+n}$ .

3) $x = -n$, määritellään $10^x = 10^{-n} = \frac{1}{10^n}$ , jolloin

$$10^{-n} \cdot 10^n = \frac{1}{10^n} \cdot 10^n = \frac{10^n}{10^n} = 1 = 10^0 = 10^{-n+n}.$$

4) $x = \frac{1}{n}$, määritellään $10^x = 10^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{10}$, jolloin

$$10^{\frac{1}{n}} \cdot \ldots \cdot 10^{\frac{1}{n}} = \underbrace{\sqrt[n]{10} \cdot \ldots \cdot}_{n\ kappaletta} \underbrace{\sqrt[n]{10} = 10}_{n\ kappaletta} = 10^1 = 10^{\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{n\ kappaletta}} .$$

5) $x = -\frac{1}{n}$, määritellään $10^x = 10^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{10^{\frac{1}{n}}}$, jolloin

$$10^{-\frac{1}{n}} \cdot \ldots \cdot 10^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{10} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{10^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{10}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{10}} = \frac{1}{10} = 10^{-1} = 10^{-\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}$$

$$= 10^{-\frac{1}{n}+\left(-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\left(-\frac{1}{n}\right)} .$$

6) $x = \frac{m}{n}$, määritellään

$$10^x = 10^{\frac{m}{n}} = \left(10^{\frac{1}{n}}\right)^m, \text{ jolloin}$$

$$10^{\frac{m}{n}} \cdot \ldots \cdot 10^{\frac{m}{n}} = \left(10^{\frac{1}{n}} \cdot \ldots \cdot 10^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(10^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\ldots+\frac{1}{n}}\right)^m = 10^{\frac{m}{n}+\frac{m}{n}\ldots+\frac{m}{n}}.$$

Menetelmä tulee tässä vaiheessa tiensä päähän, sillä eksponenttifunktiota ei voi määritellä algebrallisesti irrationaaliluvuille. Tässä vaiheessa on siirryttävä analyysin menetelmiin.

Koska $f(1) = 10$ ja se toteuttaa säännön $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$, niin

$$f(x) = 10^x = [f(1)]^x, \text{ kaikilla rationaaliluvuilla x.}$$

Tavoitteena on rakentaa sellainen funktio $f$ korvaamaan funktio $10^x$, joka on määritelty kaikille reaaliluvuille ja jolla on ominaisuus $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$. Aluksi pidetään vielä kantalukua 10 mukana, jolloin voidaan käyttää aiemmin määriteltyjä rationaalimuuttujien arvoja. Funktion $f$ halutaan vielä lisäksi olevan derivoituva.

**Oletetaan, että kaikilla edellä mainituilla ominaisuuksilla varustettu funktio $f$ on olemassa** ja muodostetaan sille derivaattafunktio:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = f(x) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{a^{0+h} - a^0}{h}$$
$$= f(x) \cdot f'(0).$$

Koska $f(0) = 1$, niin $f'(0) = 1 \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(h)-1}{h}$.

Oletetaan, että tämä raja-arvo on olemassa ja merkitään $\lim_{h \to 0} \frac{f(h)-1}{h} = \alpha$, jolloin

$$f'(x) = f(x) \cdot \alpha \text{ kaikilla } x \epsilon R.$$

Seuraavaksi siirrytään tarkastelemaan käänteisfunktiota. Käänteisfunktion derivointisäännön perusteella saadaan lauseke käänteisfunktion derivaatalle

$$\log_{10}{}'(x) = \frac{1}{f'(f^{-}(x))} = \frac{1}{f(f^{-}(x)) \cdot \alpha} = \frac{1}{x \cdot \alpha} \, ,$$

josta integroimalla lauseke käänteisfunktiolle:

$$\int_c^x \frac{1}{\alpha \cdot t} dt = \int_c^x \log_{10}{}'(t) dt$$

$$\frac{1}{\alpha} \int_c^x \frac{1}{t} dt = \log_{10} x - \log_{10} c.$$

Alarajaksi kannattaa valita $c = 1$, sillä $\log_{10} 1 = 0$ koska $10^0 = 1$. Näin ollen yhtälö tulee muotoon

$$\frac{1}{\alpha} \int_1^x \frac{1}{t} dt = \log_{10} x.$$

Koska α on edelleen tuntematon, jätetään se pois ja toivotaan, että kyseinen integraalifunktio osoittautuu logaritmiseksi jollain määritettävissä olevalla kantaluvulla:

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

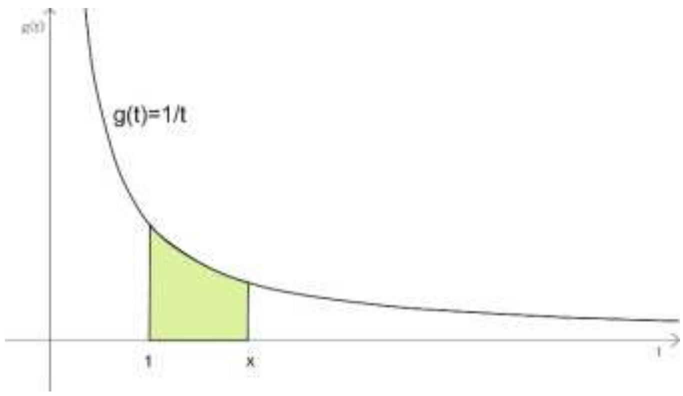
### 4.3.2 Logaritmifunktio

Määritellään logaritmifunktio:

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t} dt, \qquad x > 0.$$

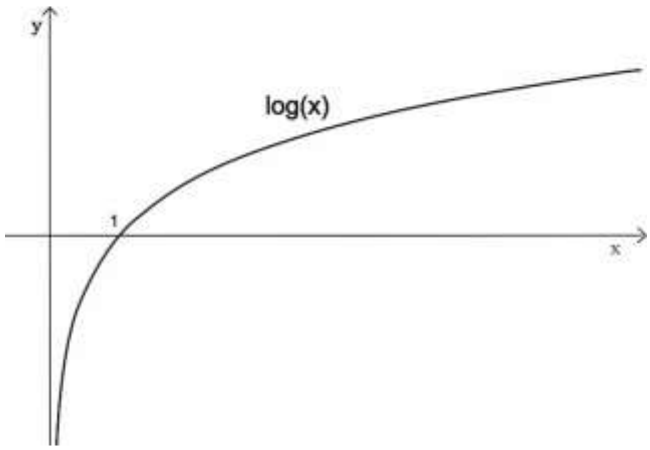
Funktiolla log on seuraavat ominaisuudet:

- Koska $\log'(x) = \frac{1}{x}$ kaikilla x > 0, niin funktio $\log(x)$ on kasvava välillä (0,∞). Kasvu kuitenkin hidastuu, sillä $\frac{1}{x} \to 0$, kun $x \to \infty$.
- Funktio log on jatkuva välillä (0,∞) sillä se on derivoituva välillä (0,∞).
- $\log(x) < 0$ jos $0 < x < 1; \log(1) = 0; \log(x) > 0$ jos $x > 1$.
- Logaritmifunktion arvo kohdassa $x$ on käyrän 1/t ja x-akselin väliin jäävä alue välillä $[x, 1]$, jos $x < 1$, tai $[1, x]$ jos $x > 1$ (kuva 7).




KUVA 15. VIHREÄ ALUE ON LOGARITMIFUNKTION ARVO KOHDASSA X.

Edellisten ominaisuuksien perusteella voidaan hahmotella kuvaaja logaritmifunktiolle (kuva 16). Funktion arvojoukkoa ei voi vielä päätellä, vaan sen määrittäminen jää myöhemmäksi.




**KUVA 16. HAHMOTELMA LOGARITMIFUNKTION KUVAAJASTA.**

Osoitetaan seuraavaksi, että funktiolla on ominaisuus samaistaa kerto- ja yhteenlasku.

**Tulon logaritmi.** Jos $x, y > 0$, niin $\log(xy) = \log x + \log y$.

**Todistus.** Analyysin peruslauseen perusteella $\log'(x) = \frac{1}{x}$. Olkoon $y > 0$ ja $f(x) = \log(xy)$, joten

$$f'(x) = \log'(xy) \cdot y = \frac{1}{xy} \cdot y = \frac{1}{x}$$

Näin ollen siis $f' = \log'$.

On siis oltava sellainen luku c, että $f(x) = \log x + c$ kaikilla $x > 0$, joten $\log(xy) = \log x + c$ kaikilla $x > 0$.

Luku c voidaan määrittää havaitsemalla, että kun $x = 1$, niin

$$\log(1 \cdot y) = \log 1 + c = c.$$

Edellisten perusteella siis $\log(xy) = \log x + \log y$, kaikilla $x > 0$. Koska myös $y > 0$, niin sääntö on näin todistettu.

Tulon logaritmikaavan avulla saadaan puolestaan seuraavat lauseet, eli logaritmin potenssi- ja osamääräkaava.

**Potenssin logaritmi.** Kaikilla luonnollisille luvuille $n$ ja reaaliluvuille $x > 0$, pätee $\log(x^n) = n \log x$.

**Todistus.** Potenssin logaritmisääntö saadaan todistettua esimerkiksi induktiolla tulon logaritmia hyödyntäen.

Olkoon $x > 0$.

*väite 1:* $\log(\mathrm{x}^{\mathrm{n}}) = \mathrm{n} \log \mathrm{x}$, kun $\mathrm{n} = 1$

$$\log(x^1) = 1 \cdot \log x$$

$$\log x = \log x.$$

Yhtälö siis pätee, kun $n = 1$.

*väite 2:* Jos $\log(x^n) = n \log x$, niin yhtälö pätee myös arvolla $n + 1$, kun $n$ on luonnollinen luku.

Oletetaan, että $\log(x^n) = n \log x$.

Koska yhtälöstä $\log(x^{n+1}) = (n+1)\log x$ saadaan

$$\log(x^{n+1}) = n\log x + \log x$$
$$n\log x = \log(x^{n+1}) - \log x,$$

ja koska oletuksen perusteella $n\log x = \log(x^n)$, niin

$$\log(x^n) = \log(x^{n+1}) - \log x$$
$$\log(x^n) + \log x = \log(x^{n+1}) \qquad \textit{(tulon logaritmi)}$$
$$\log(x^n \cdot x) = \log(x^{n+1})$$
$$\log(x^{n+1}) = \log(x^{n+1}).$$

*Väitteet 1 ja 2:* Yhtälö $\log(x^n)$=$n\log x$ , $x > 0$ pätee kaikilla luvun n arvoilla.

**Osamäärän logaritmi.** Jos $x, y > 0$, niin $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$ .

**Todistus.** Osamäärän logaritmi seuraa yhtälöstä

$$\log x = \log\left(\frac{x}{y}\cdot y\right) = \log\left(\frac{x}{y}\right) + \log y.$$

Tässä vaiheessa voidaan palata jo edellä esillä olleeseen kysymykseen logaritmifunktion arvojoukosta. Arvojoukon tulisi olla koko reaalilukujen joukko, jotta sen käänteisfunktio eksponenttifunktio olisi toiveiden mukaisesti määritelty kaikille reaaliluvuille.

**Lause 1**. Logaritmifunktion arvojoukko on kaikki reaaliluvut.

**Todistus.** Koska logaritmifunktio on kaikkialla jatkuva, niin väliarvolauseen perusteella tiedetään sen saavan kaikki arvot sillä välillä, kun se arvoja ylipäätänsä saa. Osoitetaan, että tämä väli on koko $\mathbb{R}$, josta voidaan sitten edelleen päätellä, että se saa arvoikseen kaikki reaaliluvut. Tämä onnistuu näyttämällä, että funktio ei ole ylhäältä, eikä alhaalta rajoitettu.

Funktio on kasvava, koska $\log'(x) = \frac{1}{x} > 0$, sillä $x > 0$.

Lukujono $2^n$ sisältyy logaritmifunktion muuttujajoukkoon. Koska potenssin logaritmikaavan perusteella kaikille luonnollisille luvuille $n$ pätee

$$\log 2^n = n\log 2 \qquad (\text{ja } \log 2 > 0),$$

niin yhdessä kasvavuuden kanssa voidaan päätellä, että logaritmifunktio ei ole ylhäältä rajoitettu.

Samoin tutkittaessa funktion arvoja lukujonon $\frac{1}{2^n}$ avulla, eli kun muuttuja lähestyy nollaa, saadaan

$$\log\left(\frac{1}{2^n}\right) = \log 1 - \log 2^n = -n\log 2,$$

joten lukujonon $\frac{1}{2^n}$ asettamilla muuttujilla funktio ei ole alhaalta rajoitettu.

Edellisen perusteella funktio log saa arvoja välillä $]-\infty, \infty[$ . Yhdessä jatkuvuuden kanssa tämä tarkoittaa, että se saa kaikki arvot reaalilukujen joukosta, mikä oli todistettava.

### 4.3.3 Eksponenttifunktio ja eksponenttifunktion derivaattafunktio

Koska nyt tiedetään logaritmifunktion määrittelyjoukon lisäksi myös sen arvojoukko, voidaan määritellä sen käänteisfunktio.

**Määritelmä.** Nimetään logaritmifunktion käänteisfunktio eksponenttifunktioksi ja merkitään

$$\log^{-1} = \exp.$$

Koska $\log(x)$ on määritelty vain, kun $x > 0$, niin siksi on aina $\exp(x) > 0$. Logaritmifunktion arvojoukko on koko $\mathbb{R}$, joten eksponenttifunktion määrittelyjoukko on koko $R$. Funktion exp derivaatta määritetään seuraavalla tavalla.

**Eksponenttifunktion derivaatta.** Kaikille luvuille x, on $\exp'(x) = \exp(x)$.

**Todistus**. $\exp'(x) = (\log^{-1})'(x) = \frac{1}{log\prime(log^{-1}(x))} = \frac{1}{\frac{1}{log^{-1}(x)}} = \log^{-1}(x) = \exp(x).$

Seuraava lause osoittaa, että eksponenttifunktio tekee alkioiden yhteenlaskusta kuvapisteiden kertolaskun.

**Lause 2.** Jos x ja y ovat mitä tahansa lukuja, niin

$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y).$$

**Todistus.** Olkoon $x' = \exp(x)$ ja $y' = \exp(y)$, jolloin

$$x = \log x',$$
$$y = \log y'.$$

Edellisen ja tulon logaritmisäännön perusteella saadaan

$$x + y = \log x' + \log y' = \log(x'y').$$

Näin ollen siis myös

$$\exp(x+y) = x'y' = \exp(x)\cdot\exp(y),$$

mikä oli todistettava.

Koska eksponenttifunktio on määritelty kaikille, sillä on arvo kohdassa 1. Tätä arvoa vastaavalle luvulle on tärkeytensä takia oma symboli $e$.

**Määritelmä.** $e = \exp(1)$.

*Huomio*. Määritelmä $\exp(1) = e$ on ekvivalentti yhtälön $1 = \log e = \int_1^e \frac{1}{t}dt$ kanssa, sillä $\log 1 = 0$.

Koska eksponenttifunktiolle pätee edellisen lauseen perusteella $\exp(x+y) = \exp(x) + \exp(y)$, niin yhdessä määritelmän $e = \exp(1)$ kanssa seuraa:

$$\exp(x) = [\exp(1)]^x$$

$$\exp(x) = e^x,$$

kun x on *rationaaliluku*. Koska funktion exp määrittelyjoukko on kaikki reaaliluvut, niin voidaan kuitenkin määritellä, että $e^x = \exp(x)$, kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

**Määritelmä** $e^x = \exp(x)$, kaikilla $x \in R$.

Tämän määritelmän avulla on myös johdettavissa eksponenttifunktiot, joiden kantaluku on mikä tahansa nollaa suurempi luku. Ilmaistaan se seuraavassa yhtälössä luvun $e$ avulla:

$$a^x = (e^{\log a})^x = e^{x\log a}.$$

Perustelu ensimmäisellä yhtäsuuruudelle $a^x = (e^{\log a})^x$. Näytetään, että $a = e^{\log a}$:
$a = f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(e^a) = \log e^a = (\log e)^{e^{\log a}} = e^{\log a}\cdot\log e = e^{\log a}$.

Viimeinen termi $e^{x\log a}$ on määritelty kaikille reaaliluvuille x, joten sen avulla voidaan siis määritellä myös $a^x$.

**Määritelmä** Jos $a > 0$, niin
$a^x = e^{x\log a}$, kaikilla x.

Todistetaan, että funktio säilyttää halutut potenssien laskusäännöt myös kantaluvun $a > 0$ kanssa.

**Lause 3.** Jos $a > 0$, niin

① $(a^b)^c = a^{bc}$ kaikilla b ja c.

② $a^1 = a$ ja $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ kaikilla x ja y.

**Todistus** ① $(a^b)^c = e^{c \log a^b} = e^{c \log(e^{b \log a})} = e^{c(b \log a)} = e^{cb \log a} = a^{bc}$

② $a^1 = e^{1 \log a} = e^{\log a} = a$

$a^{x+y} = e^{(x+y) \log a} = e^{x \log a + y \log a} = e^{x \log a \cdot y \log a} = a^x \cdot a^y$.

Funktion $a^x$ ominaisuudet riippuuvat siitä, onko $a < 1, a = 1$ vai $a > 1$.

$\boldsymbol{a = 1}$: $f(x) = 1^x = 1$.

$\boldsymbol{a > 1}$: Tällöin $\log a > 0$. Jos $x < y$, niin

$x \log a < y \log a$, mikä on yhtäpitävää

$e^{x \log a} < e^{y \log a}$ kanssa, eli

$a^x < a^y$.

Funktio on siis kasvava.

$\boldsymbol{0 < a < 1}$: Tällöin $\log a < 0$, josta voidaan samoin kuin edellä päätellä, että funktio on vähenevä.

Funktio $a^x, a > 0$ on bijektio, kun $a \neq 1$, sillä se on aidosti monotoninen kaikilla kantaluvuilla $a \neq 1$. Se siis saa kaikki positiiviset arvot täsmälleen kerran, josta seuraa että sen käänteisfunktio on määritelty kaikille positiivisille luvuille ja saa kaikki mahdolliset reaaliarvot. Jokaiselle kantaluvulle ($a > 0$ ja $a \neq 1$) on tällainen käänteisfunktio, jota merkitään $f^{-1}(x) = \log_a x$.

Vastaavalla tavalla, kun $a^x$ voidaan ilmaista luvun e avulla, niin voidaan ilmaista myös $\log_a x$:

Jos $y = \log_a x$, niin $x = a^y = e^{y \log_a x}$, joten $\log x = y \log a$ toisin sanoen $y = \frac{\log x}{\log a}$.

Edellisen perusteella siis on aina mahdollista suorittaa kantaluvun muunnos

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}.$$

Määritetään vielä lopuksi funktioiden $a^x$ ja $\log_a x$ derivaattafunktiot:

$f(x) = e^{x \log a}$, joten $f'(x) = \log a \cdot e^{x \log a} = \log a \cdot a^x$,

$g(x) = \frac{\log x}{\log a}$, joten rationaalifunktion derivointisäännön ja tiedon $\log' x = \frac{1}{x}$ saadaan $g'(x) = \frac{1}{\mathrm{x} \log a}$.

# 5 Eksponenttifunktio syventävässä opetuskokonaisuudessa

Tähän mennessä on esitelty eksponenttifunktion käsittelyä pitkässä matematiikassa, sen syntyhistoriaa ja tarkasti eräs modernin matematiikan määritelmä. Näiden lisäksi on esitelty tutkimushistorian valossa ongelmia, joita aihepiirin pitkän matematiikan sisältöjen oppimiseen liittyy, sekä yleinen matemaattisen käsitteen muodostusta mallintava APOS – teoria. Näiden avulla vastataan tässä luvussa tutkimuskysymyksiin:

1. Mitkä ovat tavoitteessa olevan eksponenttifunktion pitkän matematiikan aihepiirin oppisisältöjä syventävän opetuskokonaisuuden
   a) sisällöt ja
   b) sisältöihin liittyvät tavoitteet?
2. Kuinka tavoitteiden mukainen ymmärrys saavutetaan (hypoteesi)?

## 5.1 Syventävän opetuksen sisältö ja tavoitteet

Pitkän matematiikan eksponenttifunktioon liittyviä oppisisältöjä olisi mahdollisuus syventää moneen suuntaan. Esimerkiksi voisi tutkia sovellusten näkökulmasta sen yhtenevyyttä todellisen maailman ilmiöiden kanssa. ”Eksponenttifunktio tarjoaa ainutlaatuisen tilaisuuden tutkia luonnonilmiöiden ja matematiikan suhdetta tehden näin matematiikasta lähestyttävämpää”, kuten Confrey (1994) toteaa. Aiheeseen ja sen syventämiseen voisi ottaa vaihtoehtoisesti myös algebrallisen näkökulman. Syventämisen algebran suuntaan voisi tehdä esimerkiksi siten, että pohtisi potensseihin ja logaritmeihin liittyvien määritelmien ja laskusääntöjen suhdetta, sekä harjoittelisi todistamista niiden kanssa. Tähän työhön on kuitenkin valittu eksponenttifunktion syventäminen analyysin suuntaan. Ideana on käsitellä eksponenttifunktiota analyysin menetelmin edellisessä luvussa esitellyn määritelmän tavoin (Spivak 1994).

Syventävän opetuksen sisällöksi ei kannata asettaa koko Spivakin määritelmän ymmärtämistä kaikkine todistuksineen ja määritelmässä käytettävine teoreemoineen. Aiemmin esitettyjen tutkimustulosten perusteella oppilaiden ei voi olettaa ymmärtävän tarpeeksi kirkkaasti lukiosisältöjäkään. Asetetaan sen sijaan sisällöiksi konstruktion juonen kannalta oleelliset välivaiheet. Ne ovat seuraavat:

1) Integraalin $\int_a^x \frac{1}{t}\,dt$ muodostaminen konstruktion lähtökohdaksi.
2) Funktion $\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ muodostaminen.

3) Todetaan edellä muodostetun funktion olevan logaritmifunktio, koska se muuttaa kertolaskun yhteenlaskuksi ($log(xy) = log(x) + log(y)$).
4) Todetaan, että logaritmifunktion arvojoukko on koko reaalilukujen joukko.
5) Käännetään funktio eksponenttifunktioksi.
6) Muodostetaan kaikkien eksponenttifunktioiden joukko.

Seuraavaksi asetetaan edellisiin sisältöihin liittyvät tavoitteet. Tyypillisesti tavoitteiksi asetetaan taitoja tai tietoja, kuten ”tuntee juuri-, eksponentti- ja logaritmifunktioiden ominaisuudet ja osaa ratkaista niihin liittyviä yhtälöitä (Opetushallitus 2013)”. Opetuskokonaisuuteen sisältyy edelliset kuusi välivaihetta ja niiden yhteydessä on tarkoitus tehdä oma eksponenttifunktiokonstruktio GeoGebra-ohjelmalla. Asetetaan tavoitteeksi, että opiskelija ymmärtää sisällöt siten, että kykenee tekemään GeoGebra-konstruktion.

## 5.2 APOS – teoria ja eksponenttifunktio syventävässä opetuskokonaisuudessa

Toisena tutkimuskysymyksenä on, kuinka edellä asetettu ymmärrys eksponenttifunktiosta saavutetaan. Kysymykseen vastataan muodostamalla APOS-teorian mukainen malli, jossa edellä asetettujen sisältöjen ja tavoitteiden mukainen eksponenttifunktiokäsitteen muodostus jaetaan vaiheisiin. Apuna käytetään kahta aiemmin laadittua aihepiiriin liittyvää mallia, joista toinen koskee funktiota (Braidenbach ym. 1992) ja toinen eksponenttifunktiota (Weber 2002a). Artikkelit on tarkemmin esitelty luvussa kolme. Muodostettua mallia peilataan lopuksi vielä kolmannessa luvussa esiteltyyn aihepiiriin liittyvään tutkimushistoriaan.

Weberin mallia (Weber 2002a) käytetään pohjana tässä tehtävässä eksponenttifunktiokäsitteen muodostuksen mallinnuksessa. Sitä on kuitenkin laajennettava hieman, sillä Weberin tutkima eksponenttifunktiokäsite vastaa vain lukion oppisisältöjä, kun tässä kohteena oleva eksponenttikäsite menee lukiosisältöjen yläpuolelle. Weberin mallissa tarkastellaan eksponenttifunktioon liittyvän prosessin kapseloitumista objektiksi, toisin sanoen sitä että $b^x$ ei ole vain laskutoimitus vaan myös objekti. Siinä ei kuitenkaan edelleen tarkastella, kuinka kyseinen saavutettu objekti tulee toimintojen kohteeksi. Edellä asetettuihin sisältöihin ja tavoitteisiin sisältyy tämä askel: eksponentti- ja logaritmifunktiot otetaan käyttöön toiminnan kohteiksi tekemällä niille ja niiden kesken laskutoimituksia ja muuntamalla niitä uusiksi funktioiksi. Funktiokäsitettä koskeva malli (taulukko 6) on apuna tässä laajennuksessa, sillä siinä otetaan myös edellä kuvattu askel huomioon. Weberin mallia on täydennettävä myös logaritmifunktiokäsitteen suhteen, sillä se esiintyy opetuskokonaisuuden tavoitteissa itsenäisenä käsitteenä.

TAULUKKO 6. LUVUSSA KOLME ESITELTY MALLI KOSKIEN FUNKTIOKÄSITTEENMUODOSTUKSEN VAIHEITA (BRAIDENBACH YM. 1992).

| **Funktiokäsitteen muodostuksen vaihe** | **Vaiheeseen liittyvät tiedot ja taidot** |
|---|---|
| *toiminta* | • osaa sijoittaa muuttujalle arvon funktioiden lausekkeisiin |
| *prosessi* | • kykenee käsittelemään sellaisia funktioita, joiden arvoja ei voi laskea suoraan ilman laskinta tai muistinvaraisia sääntöjä, kuten sinx ja lnx<br>• tilanteiden ymmärtäminen funktioina, vaikka muuttujat tai arvot eivät ole numeerisia, esimerkiksi totuusarvofunktio<br>• Käsitteiden *yhdistetty funktio, paloittain määritelty funktio* ja *käänteisfunktio* konstruktio edellyttävät funktion ymmärtämistä prosessina |
| *objekti* | • joukko funktioita<br>• funktioiden yhteen- ja kertolasku<br>• funktiot, jotka muuttavat funktioita toisenlaiseksi funktioiksi |

### 5.2.1 Eksponenttifunktio toimintana ja prosessina

Eksponenttifunktiokäsitteen kehittymisen toimintavaiheeseen liittyy Weberin mukaan (2002a ja b) arvon $b^x$ laskemista kertomalla lukua b x kertaa itsellään. Mikä voisi sitten olla vastaavanlainen toiminto logaritmifunktion suhteen? Braidenbach, Dubinsky, Hawks ja Nichols (1992) esittivät funktioon liittyväksi toiminnaksi sijoitusmenettelyn (taulukko 6). Toiminta logaritmifunktion yhteydessä on siten vastaavasti tilanteiden käsittely logaritmin määritelmällä ($b^x = y$ on yhtä pitävää sen kanssa että $x = \log_b y$), koska sen avulla tehtäviä voi ratkaista sijoitusmenetelmällä. Tarkastellaan seuraavaksi kahden esimerkin avulla sijoitusmenettelyyn perustuvaa toimintoa käytännössä. Tehtävät ovat logaritmifunktiota käsittelevästä pitkän matematiikan kahdeksannen kurssin oppikirjan (Kangasaho ym. 2006) kappaleesta.

**Esimerkki. Määritä y, kun $\log_8 y = 3$.** Tehtävän suorittamiseen riittää toiminta: sijoitus a=3 ja b=8 määritelmään

$$b^x = y \Leftrightarrow x = \log_b y.$$

**Esimerkki. Ilmaise luku 7 luvun 10 potenssina.** Tehtävän voi suorittaa logaritmin määritelmään perustuvalla toiminnolla, kunhan osaa ensiksi muodostaa yhtälön $7 = 10^x$. Logaritmin määritelmän perusteella saadaan yhtälöstä $x = \log_{10} 7$, joten sijoittamalla saadaan $7 = 10^{\log_{10} 7}$.

Pohditaan sitten seuraavaksi, mitä tarkoittaa eksponentti- ja logaritmifunktion ymmärtäminen prosesseina. Weberin mukaan kyse on siitä, että ymmärtää lausekkeen $\mathrm{b}^\mathrm{x}$ funktiona ja osaa perustella sen ominaisuudet. Esimerkiksi eksponenttifunktion ymmärtämisestä prosessina kertoo Weberin mukaan se, että henkilö tulkitsee merkinnän $f(x) = b^x$: ”lukua b kerrotaan x kertaa itsellään”. Braidenbachin, Dubiskyn, Hawksin ja Nicholsin (1992) mukaan vastaavasti funktion ymmärtämisestä prosessina kertoo sellaiset funktiota kuvailevat lauseet, kuten ”funktio on lauseke, jonka perusteella annettuja arvoja muutetaan toisiksi arvoiksi” tai ”funktio on algoritmi, joka muuntaa annetun syötteen tietynlaiseksi tulokseksi”. Logaritmifunktion suhteen prosessiajattelusta olisi siis kyse, kun henkilön ymmärtää, että $\log_{\mathrm{b}} \mathrm{x}$ ei ole vain merkintä tai eksponenttiyhtälöön liittyvä ratkaisutaktiikka, vaan myös funktio ominaisuuksineen (taulukko 7: *prosessi/logaritmifunktio*).

**TAULUKKO 7. EKSPONENTTI- JA LOGARITMIFUNKTIO TOIMINTANA JA PROSESSINA.**

| | **EKSPONENTTIFUNKTIO (Weber 2002a)** | **LOGARITMIFUNKTIO** |
|---|---|---|
| ***toiminta*** | • arvon $b^x$ laskemista kertomalla b x kertaa itsellään | • logaritmin määritelmä: $b^x = y$ on yhtä pitävää sen kanssa että $x = \log_b y$ |
| ***prosessi*** | • $\mathrm{b}^{\mathrm{x}}$ on funktio, esimerkiksi $2^{\mathrm{x}}$. Tietää funktion perusominaisuudet ja osaa perustella ne.. | • $\log_{\mathrm{b}} \mathrm{x}$ on funktio, esimerkiksi $\log_2 \mathrm{x}$. Tietää funktion perusominaisuudet ja osaa perustella ne. |

### 5.2.2 Eksponenttifunktio objektina

Henkilön ymmärtäessä, että myös prosessin lopputulosta voi muokata, voidaan hänen sanoa saavuttaneen objektivaiheen (Asiala ym. 1996). Otetaan aluksi yksi esimerkki pitkän matematiikan kurssikirjatehtävästä (Kontkanen ym. 2002, s.61), missä logaritmifunktio esiintyy objektina.

**Esimerkki.** Yhtälössä $3^y = x$ eksponentti $y$ on luvun $x$ 3-kantainen logaritmi. Ratkaise yhtälöstä $y$ (käyttäen kymmenkantaista logaritmia). Ilmaise funktio $\log_3 x$ funktion $\lg x$ avulla. Piirrä funktion $\log_3 x$ kuvaaja graafisen laskimen avulla.

**Ratkaisu.**

$$3^y = x$$

$$y = \frac{\lg x}{\lg 3}$$

$$\log_3 x = \frac{\lg x}{\lg 3}.$$

Tässä vaiheessa tehtävää funktiot on viimeistään ymmärrettävä objekteina, jotta ymmärtää yhtälön $\log_3 x = \frac{\lg x}{\lg 3}$ perusteella, kuinka funktiosta $\lg x$ voi rakentaa funktion $\log_3 x$. On osattava merkitä esimerkiksi $f(x) = \lg x$ ja $\log_3 x = \frac{f(x)}{\lg 3}$. Braidenbachin, Dubiskyn, Hawksin ja Nicholsin (1992) mukaan funktioiden muodostaminen toisen funktion avulla edellyttää funktion ymmärtämistä objektina.

Siirrytään seuraavaksi tarkastelemaan, mitä tarkoittaa eksponentti- ja logaritmifunktio objekteina erityisesti tavoitteena olevan opetuskokonaisuuden sisältöjen näkökulmasta. Kyetäkseen käsittelemään funktiojoukkoa, funktioiden keskeisiä laskutoimituksia tai funktioita, jotka muuttavat funktioita toisenlaiseksi funktioiksi on funktio ymmärrettävä objektina (Braidenbach ym. 1992). Kaikki edelliset kuuluvat tavoitteessa olevan opetuskokonaisuuden sisältöihin.

Ensinnäkin koko ydinsisältönä on määritelmä $\log x = \int_1^x \frac{1}{t} dt, x > 0$. Tämän Dubinsky (1991) esittää artikkelissaan malliesimerkkinä prosessin kapseloitumisesta objektiksi. Hänen mukaansa kapseloitumiskonstruktiota vaativat käsitteet ovat opiskelijoille vaikeita omaksua.

Toinen sisällöissä esiintyvä objektiymmärrystä edellyttävä asia on se, että konstruktiossa käsiteltävillä eksponentti- ja logaritmifunktiolla ei ole aluksi kantalukua. Eksponenttifunktio esiintyy ennen kantaluvun kiinnittämistä muodossa $eksp(x)$ tutun muodon $b^x$ sijaan ja logaritmifunktio muodossa $log(x)$ muodon $\log_b x$ sijaan. Merkintöjen käsittäminen edellyttää eksponentti- ja logaritmifunktioiden ymmärtämistä joukkoina.

Objektiymmärrystä vaatii myös funktioiden keskeisten laskusääntöjen käsittely (Braidenbach ym 1992). Tämä on myös hyvin keskeisellä sijalla sisällöissä. Konstruktion välivaiheissa 3 ja 5 funktioita testataan, pätevätkö niille laskusäännöt:

$$eksp(x+y) = eksp(x) \cdot eksp(y)$$
$$log(xy) = log\, x + log\, y.$$

Kyseessä on tutut potenssien ja logaritmien yhteen- ja kertolaskua koskevat säännöt, mutta nyt ne on ymmärrettävä uudessa asiayhteydessä funktioiden laskusääntöinä.

Tavoite koskien määritelmän osaamista sillä tasolla, että kykenee tekemään opetuskokonaisuuden ohessa olevan GeoGebra – konstruktion, edellyttää siis eksponentti – ja logaritmifunktion oivaltamista objekteina. Asetettu tavoite voidaan sanoa siten myös APOS – teorian termein: tavoitteena on ymmärtää eksponentti- ja logaritmifunktio objekteina. Piagert'n teorian mukaan objekteja on mahdollista muodostaa vain prosessista käsin, kapseloimalla prosessi objektiksi (Braidenbach ym 1992). Tavoitteita kohti ponnistaakseen funktiot on siis ymmärrettävä aluksi vähintään prosesseina.

## 5.3 Syventävän opetuksen sisältö ja tavoitteet, täydennys

Edellä todettiin, että ollakseen edellytykset saavuttaa opetuskokonaisuuden tavoitteet (ymmärtää eksponentti- ja logaritmifunktio objekteina), henkilön on ymmärrettävä eksponentti- ja logaritmifunktiot vähintään prosessina. Opetuskokonaisuuden sisältöihin on siis lisättävä vielä jotain sellaista, mikä kehittäisi ja varmistaisi funktioihin liittyvää prosessiymmärrystä. Ennen kuin pohditaan, mitä nämä sisällöt voisivat olla, kootaan myös muut tässä työssä esiintyneet huomiot tukemaan edellistä väitettä: miksi on tärkeää ymmärtää eksponentti- ja logaritmifunktio prosessina opetuskokonaisuuden sisältöjä ja tavoitteita ajatellen.

Keskeisellä sijalla opetuskokonaisuudessa on eksponentti- ja logaritmifunktion käänteisfunktiosuhde. Funktion käänteisfunktion ymmärtäminen vaatii prosessikäsitystä funktiosta (Weber 2002, Braidenbach ym. 1992, Asiala ym. 1996 ja Dubinsky 1991). Lisäksi ilman prosessiymmärrystä ei voi käsitellä funktioita, joiden arvoja ei ole mahdollista laskea suoraan sijoittamalla (ilman laskinta) esimerkiksi funktioita $\ln x$ ja $\sin x$ (Asiala ym. 1996). Weberin mukaan (Weber 2002a ja b) myös eksponenttifunktio on tällainen funktio tilanteissa, joissa muuttuja edustaa jotain muuta lukualuetta, kuin positiivista kokonaislukua. Esimerkiksi ilmaisua $3^{-3}$ ei ole mahdollista käsitellä toiminnolla ”kolme kerrottuna miinus kolme kertaa itsellään”. Samoin on myös konstruktiossa esiintyvien merkintöjen $eksp(x)$ ja $log(x)$ suhteen.

Eksponentti- ja logaritmifunktiot olisi siis ymmärrettävä prosesseina kyetäkseen työstämään opetuskokonaisuuden sisältöjä. Prosessiymmärrystä ei voi kuitenkaan olettaa olevan oppilailla, ainakaan tässä työssä esiteltyjen tutkimustulosten pohjalta. Luvussa kolme esitelty Weberin (2002a) tutkimustulos oli, että suurin osa tutkimushenkilöinä olleista opiskelijoista ei ollut onnistunut edistymään toimintatasoa pidemmälle eksponenttifunktion osalta. Pitta-Pantazi, Christou ja Zachariades (2007) taas havaitsivat tutkimushenkilöinä olleilla lukion toisen vuoden opiskelijoilla olevan hankaluuksia käsittää eri lukualueiden eksponentteja, kuten $a^{-n}$ ja $a^{\frac{m}{n}}$, missä $m$ ja $n$ ovat kokonaislukuja. Tämän kaltaiset mahdolliset hahmotusongelmat asettavat lisähaasteensa koko funktioprosessin ymmärtämistä ajatellen. Lisäksi Braidenbach, Dubinsky, Hawks ja Nichols (1992) totesivat tutkimushenkilöidensä (amerikkalaisia ensimmäisen vuoden opettajaopiskelijoita) olevan toimintatasolla koskien yleisesti funktiokäsitettä.

Näiden johtopäätösten myötä lisätään opetuskokonaisuuden sisältöihin vielä johdanto-osio, jonka tarkoitus on kehittää eksponentti- ja logaritmifunktion ymmärtämistä prosesseina. Opetuskokonaisuus sisältää siten kaksi osiota. Ensimmäisen osion tavoite on ymmärtää eksponentti- ja logaritmifunktio prosessina ja toisen osion tavoitteena on ymmärtää ne objekteina.

Ensimmäisen osion sisältönä on eksponentti- ja logaritmifunktion historiallinen kehitys. Idea tähän on artikkelista, jossa esitellään ideoita logaritmien opettamiseen historian avulla (Panagiotou 2010). Panagiotoun mukaan historian kautta käy ilmi, että logaritmi ja sen myötä kehitetyt logaritmi- ja eksponenttifunktiot eivät ole vain sattumanvaraisia oppikirjojen sivuilla olevia määritelmiä, vaan asteittain kehitetty ratkaisuksi oikeisiin ongelmiin. Tämä sopii hyvin koskien ensimmäisen opetuskokonaisuuden tavoitetta ymmärtää eksponentti- ja logaritmifunktiot prosesseina. Käsitteen historiallinen kehitys on prosessi, joten näin ollen se antaa tarkoituksen mukaisen näkökulman eksponenttikäsitteeseen prosessina, toisin kuin valmis staattisena näyttäytyvä määritelmä. Koska prosessi on sisäistynyttä toimintaa, prosessiymmärryksen kehitykselle on tärkeää myös konkreettinen toiminta. Myös tälle historian käsittely antaa hyvät puitteet. Historialliseen kehitykseen liittyvien laskenta-algoritmien kanssa voi funktioita ja niiden arvoja käsitellä toiminnalla ilman käsitteellisempää ymmärrystä funktioista. Hypoteesina on, että toistuva funktioiden arvojen määrittäminen laskentataulukoista kehittäisi funktioiden ymmärtämistä prosesseina. Lisätavoitteena on ymmärtää vielä funktioiden prosessien vastaavan käänteisesti toisiaan. Historian kautta olisi tarkoitus myös selvitä, miksi funktiot testataan eksponentti- ja logaritmifunktioiksi laskusäännöillä $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ ja $l(x \cdot y) = l(x) + l(y)$. Näiden laskusääntöjen harjoittelu on hyödyllistä muutenkin. Weberin eksponenttifunktiota koskevan tutkimuksen (2002a) tutkimushenkilöistä vain kuusi viidestätoista oli muistanut kaavan $\log_b x + \log_b y = \log_b xy$ ja samoin vain kuusi kaavan $b^{x+y}$= $b^x b^y$. Kukaan ei ollut kyennyt havaitsemaan yhteyttä sääntöjen välillä.

# 6 Syventävä opetuskokonaisuus

Tässä luvussa esitetään opetuskokonaisuusidea pitkän matematiikan eksponenttifunktion aihepiirin laajentamiseen ja syventämiseen. Sen sisältö perustuu luvussa neljä käytyyn eksponenttifunktion määritelmään (Spivak 1994). Tarkemmin sisällöiksi valittiin edellisessä luvussa määritelmän juonen kannalta oleelliset välivaiheet:

1) Integraalin $\int \frac{1}{x} dx$ muodostaminen konstruktion lähtökohdaksi.
2) Funktion $\int_1^x \frac{1}{t} dt$ muodostaminen.
3) Todetaan edellä muodostetun funktion olevan logaritmifunktio, koska se muuttaa kertolaskun yhteenlaskuksi ($log(xy) = log(x) + log(y)$).
4) Todetaan, että logaritmifunktion arvojoukko on koko reaalilukujen joukko.
5) Käännetään funktio eksponenttifunktioksi.
6) Muodostetaan edellisestä kaikkien eksponenttifunktioiden joukko.

Näihin sisältöihin liittyväksi tavoitteeksi asetettiin sen tasoinen ymmärrys, että kykenee tekemään opetuskokonaisuuden ohessa kulkevan GeoGebra – konstruktion. Tämän todettiin tarkoittavan APOS – teorian mukaisen aihepiiriä koskevan mallinnuksen perusteella sitä, että ymmärtää eksponentti- ja logaritmifunktion objekteina. Opetuskokonaisuus koostuu kahdesta osasta, jossa ensimmäisessä esitellään eksponenttifunktion syntyhistoriaa. Ensimmäisen osion tavoitteena on ymmärtää eksponentti- ja logaritmifunktiot prosesseina. Ilman tätä ymmärrystä ei voi ymmärtää funktioita objekteina.

Opetuskokonaisuus on suunnattu sellaisille henkilöille, jotka ovat opiskelleet vähintään kahdeksan ensimmäistä pitkän matematiikan kurssia. Sen toteuttamisympäristöksi sopisi esimerkiksi syventävä kurssi. Tällöin sen toteuttamistapa voisi olla seuraan kaltainen. Johdanto käydään kurssin alkupäässä ja on kestoltaan noin 2-4 oppituntia. Se toteutetaan perinteisenä opetuksena, jossa on yhteistä opetusta ja tehtävien tekoa. Funktiokonstruktio-osio taas on rakennettu projektityömuotoon. Se toteutetaan kurssin aikana tehtävänä kurssityönä. Kurssilaisille jaetaan kaksi materiaalia. Toinen on taustamateriaali, jonka sisältö on hyvin tarkalleen sama, kuin tämän työn osiot 4.1 (eksponenttifunktion historiaa) ja 4.3 (eksponenttifunktion määritelmä). Toinen on materiaali, joka esittelee eksponenttifunktion määritelmää opetuskokonaisuuden tavoitteista käsin ja sisältää ohjeet projektityölle (itse rakennettavalle eksponenttifunktiolle). Osio 6.2 on laadittu siten, että se sisällön ja etenemisen puolesta se olisi tällainen materiaali pois lukien ratkaisuehdotukset.

## 6.1 Opetuskokonaisuuden ensimmäinen osio (historiaa/eksponenttifunktio prosessina)

Tähän osioon on koottu ne sisällöt, joita johdantokokonaisuuteen kuuluu. Varsinainen esitystapa määräytyy vasta käytännön puitteiden perusteella. Aiheisiin liittyviä tehtäviä on hyvä poimia oppikirjoista kertaukseksi materiaalin tehtävien lisäksi.

**Eksponenttifunktio.** Kertausta eksponenttifunktion ominaisuuksista.

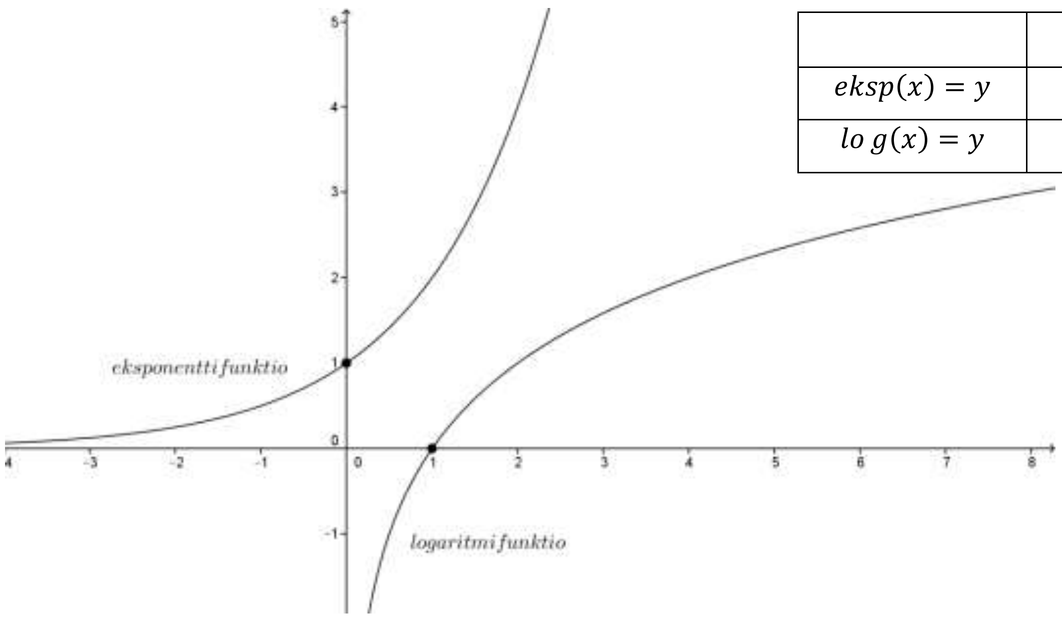
$$eksp(x) = k^x, k > 0.$$

Määrittelyjoukko on $]-\infty, \infty[$ ja arvojoukko on $]0, \infty[$ (kuva x). Funktion kuvaaja kulkee aina pisteen $(0,1)$ kautta.

Eksponenttifunktiolla on käänteisfunktio logaritmifunktio:

$$log(x) = \log_k x, k > 1.$$

Määrittelyjoukko on $]0, \infty[$ ja arvojoukko on $]-\infty, \infty[$. Funktion kuvaaja kulkee aina pisteen $(0,1)$ kautta (kuva x).




| | $x$ | $y$ |
|---|---|---|
| $eksp(x) = y$ | $0$ | $1$ |
| $lo\ g(x) = y$ | $1$ | $0$ |

*Lisäksi oppikirjoista poimittuja kertaustehtäviä käänteisfunktiosta sekä eksponentti- ja logaritmifunktioista.*

*Tehtävä. Olkoon* $eksp(x) = 3^x$ .

a) Määritä arvot $eksp(0)$, $eksp(1), eksp(2)$, $eksp(3), eksp(-1), eksp(-2), eksp\left(\frac{1}{2}\right)$ ja $eksp\left(-\frac{1}{2}\right)$ ja kirjoita taulukkoon. Käytä hyväksesi potenssien määritelmiä.

| $x$ | $eksp(x)$ |
|---|---|
| 0 | |
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| -1 | |
| -2 | |
| 1/2 | |
| -1/2 | |

| $x$ | $log(x)$ |
|---|---|
| 1 | |
| 3 | |
| 9 | |
| $eksp(3)$ | |
| $eksp(-1)$ | |
| 81 | |

b) Muodosta funktion $eksp(x) = 3^x$ käänteisfunktion $log(x)$ lauseke.

c) Määritä arvot $log(1)$, $log(3)$, $log(9)$, $log(eksp(3)), log(eksp(-1))$ ja $log(81)$. Käytä hyväksesi logaritmin määritelmää ja potenssien määritelmiä.

HISTORIALLISTA TAUSTAA

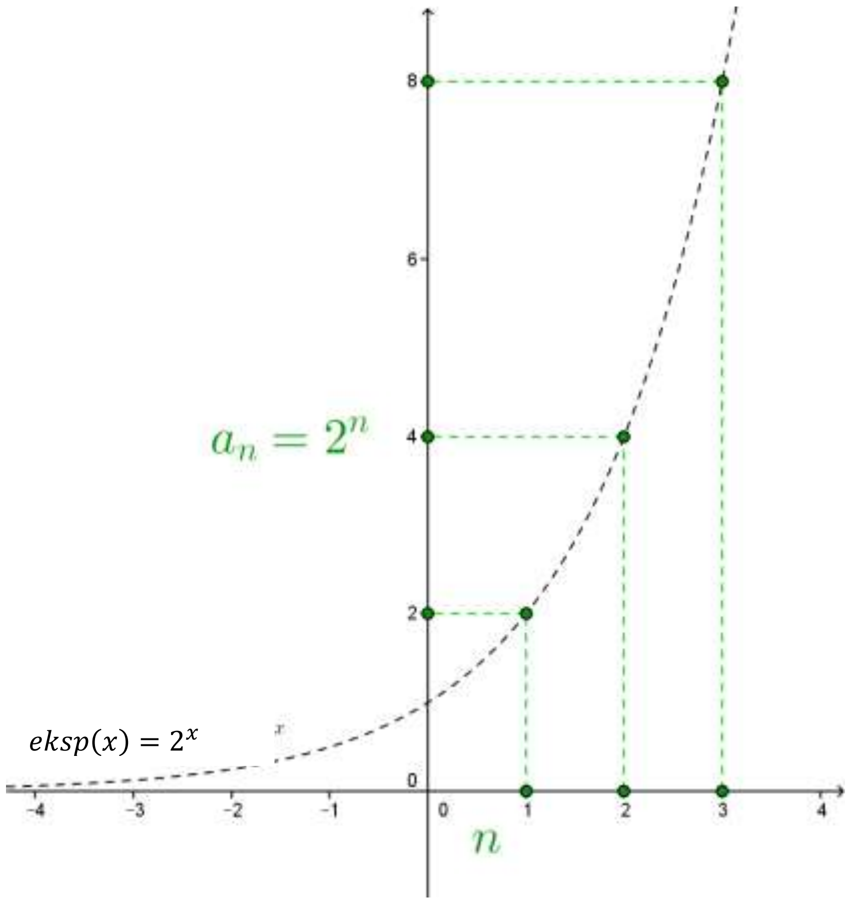
Tarve tehokkaammille laskentamenetelmille nousi Euroopassa merenkäynnin ja tieteiden, kuten tähtitieteen, kehittymisen myötä 1400 - luvulla. Laskutoimituksia jouduttiin tekemään entistä huomattavasti suuremmille luvuille, mutta perinteinen suoraviivainen käsin laskeminen oli suurilla luvuilla laskettaessa hyvin virhealtista. Eksponentti ja logaritmifunktioiden ominaisuus samaistaa kerto- ja yhteenlasku oli merkittävässä roolissa tehokkaampien ja tarkempien laskentamenetelmien kehityksessä. Silloin vielä funktiot eivät olleet nykyisessä muodossaan $k^x$ ja $\log_k x$ vaan esiintyivät geometrisenä lukujonona $k^n$. Ennen eksponenttifunktion ja logaritmifunktion ominaisuuksiin liittyvien laskentamenetelmien tutkimista tarkastellaan aluksi geometrisen lukujonon yhteyttä eksponentti- ja logaritmifunktioon.

EKSPONENTTIFUNKTION YHTEYS GEOMETRISEEN LUKUJONOON

Eksponenttifunktion ensimmäinen muoto oli geometrinen lukujono $k^n$, missä luku $k$ on positiivinen kokonaisluku. Alla on esimerkki lukujonosta $n = 2^n$ (taulukko x). Jono on geometrinen lukujono, koska sillä on suhdeluku 2. Suhdeluku tarkoittaa sitä, että jonon jäsen saadaan kertomalla edellinen jäsen luvulla 2.

TAULUKKO 8

| $\boldsymbol{n}$ | $\boldsymbol{a_n = 2^n}$ |
|---|---|
| 1 | $a_1 = 2^1$ =2 |
| 2 | $a_2 = 2^2$ =4 |
| 3 | $a_3 = 2^3$ =8 |
| 4 | $a_4 = 2^4$ =16 |
| 5 | $a_5 = 2^5$ =32 |
| 6 | 64 |
| 7 | 128 |
| 8 | 256 |
| 9 | 512 |
| 10 | 1024 |
| 11 | 2048 |
| 12 | 5096 |




**Esimerkki.** Laske jonon 16. jäsen.

**Ratkaisu.** Suoraan laskimella $a_{16} = 2^{16} = 65536$.

Vaihtoehtoisesti jäsenen $a_{16}$ voi määrittää suhdeluvun avulla. Jäsen $a_{12}$ on taulukon mukaan luku 5096. Seuraavan saa kertomalla luvulla kaksi, jolloin $a_{13}$ on 10192, $a_{14} = 20384$, $a_{15} = 40768$ ja $a_{16} = 81536$.

Taulukon vieressä oleva kuva selittää jonon yhteyttä vastaavaan eksponenttifunktioon $eksp(x) = 2^x$. Kuvasta näkyy, kuinka lukujono sisältyy eksponenttifunktioon: $eksp(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{2^n}$.

**Esimerkki.** Määritä taulukon perusteella, kuinka monta kertaa luku 2 on kerrottava itsellään, että saadaan luku 256.

**Ratkaisu.** Ratkaistaan $n$ yhtälöstä $2^n = 256$ taulukon perusteella. Koska jonon ensimmäinen jäsen on luku 2 yhden kerran kerrottuna itsellään, niin jonon kahdeksas jäsen on luku 2 kahdeksan kertaa itsellään kerrottuna.

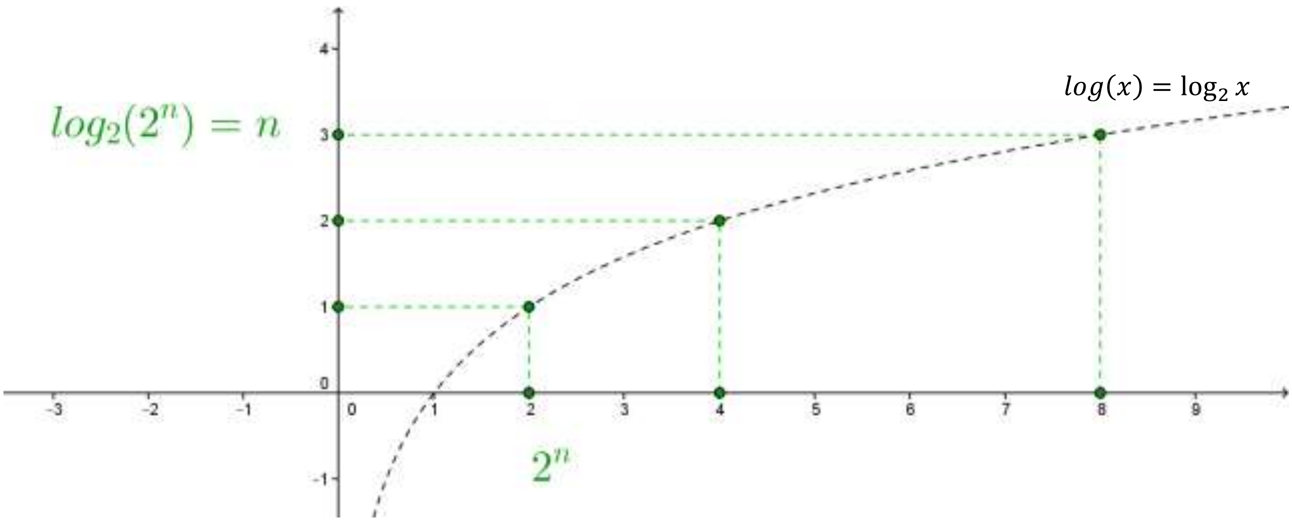
Logaritmi määriteltiin jo hyvin varhaisessa vaiheessa. Edellisen esimerkin ratkaisu, luku 8 sanottiin jo varhaisen määritelmän mukaan luvun 256 kaksikantaiseksi logaritmiksi, yleisesti luku $n$ on luvun $k^n$ $k$-kantainen logaritmi. Tämä on yhtenevää nykyaikaisen logaritmin määritelmän kanssa:

$$\log_k a = x, \quad \text{kun } k^x = a,$$

$$\text{esimerkiksi } \log_2 256 = 8, \quad \text{sillä } 2^8 = 256.$$

| $n$ | $2^n$ |
|---|---|
| 1 | $2^1$ =2 |
| 2 | $2^2$ =4 |
| 3 | $2^3$ =8 |
| 4 | $2^4$ =16 |
| 5 | $2^5$ =32 |
| 6 | 64 |
| 7 | 128 |
| 8 | 256 |
| 9 | 512 |
| 10 | 1024 |
| 11 | 2048 |

Kun eksponenttifunktio muuntaa taulukon luvut $n$ luvuiksi $k^n$ ($eksp(n) = 2^n$), niin logaritmifunktio tekee sen käänteisfunktiona päinvastoin. Se palauttaa lukujonon jäsenen $k^n$ järjestysluvuksi $n$, toisin sanoen $log(k^n) = n$ (kuva x). Kuvassa on esimerkkinä funktio $log(x) = \log_2 x$.



**Esimerkki.** Olkoon $log(x) = \log_2 x$. Määritä $log(16)$ ja $log(32)$.

**Ratkaisu.** $log(16) = \log_2 16 = 4$, ja

$log(32) = \log_2 32 = 5$.

| $\mathbf{2^n}$ | $\log_2(\mathbf{2^n}) = \boldsymbol{n}$ |
|---|---|
| 2 | $\log_2(2) = 1$ |
| 4 | $\log_2(4) = 2$ |
| 8 | $\log_2(8) = 3$ |
| 16 | $\log_2(16) = 4$ |
| 32 | $\log_2(32) = 5$ |
| ⋮ | ⋮ |
| $2^n$ | $\log_2(2^n) = n$ |

*Tehtävä 1. Tee Excel – ohjelmalla taulukko suhdeluvulle 3.*

1) ***Luo lukujono 1, 2, …, n**. Muodosta lukujono sarakkeeksi (pystysuoraan) seuraavalla tavalla. Valitse yksi solu siten, että sen ympärille jää muutama riviä ja saraketta. Kirjoita soluun luku 1 ja sen alla sijaitsevaan soluun luku 2. Maalaa kirjoittamasi luvut ja jatka lukujonoa vetämällä oikeasta alakulmasta alaspäin.*
2) ***Luo suhdeluku 3.*** Valitse uusi solu äsken luomasi lukujonon lähettyviltä, mutta hiukan väliä jättäen ja kirjoita soluun suhdeluku 3.
3) ***Luo kaava geometriselle lukujonolle** $\mathbf{3, 3^2, 3^3}$ … Valitse yksi solu lukujonon viereiseltä sarakkeelta, esimerkiksi luvun yksi vierestä. Kirjoita syötekenttään =, valitse sitten solu, jossa sijaitsee suhdeluku 3, paina f4 saadaksesi kaavaan kiinteän viittauksen, merkitse potenssi ^, lopuksi valitse viereisessä solussa oleva lukujonon jäsen ja paina Enter. Kopio kaavaa vetämällä oikeasta alakulmasta.*
4) ***Muuta geometristen lukujonojen jäsenet murtoluvuiksi.** Maalaa lukujono ja valitse yläpalkista: ”aloitus-numero-murtoluku”.*

*KOMMENTTI: taulukoita voi helposti tehdä useammankin samalla vaivalla. Tehtäviä saa siten helposti lisää ja niissä esiintyviin lukuihin vaihtelua.*

*Tehtävä 2. Määritä taulukon avulla seuraavat arvot.*

*a.* $3^5$
*b.* $3^{11}$
*c.* $3^{19}$
*d.* $\log_3 3$
*e.* $\log_3 27$
*f.* $\log_3 81$
*g.* $\log_3 2187$

*Tehtävä 3. Olkoon* $eksp(x) = 3^x$ *ja* $log(x) = \log_3 x$ *Määritä taulukon avulla seuraavat arvot.*

*a.* $eksp(6)$
*b.* $eksp(8)$
*c.* $log(9)$
*d.* $log(243)$
*e.* $log(1594323)$

*Tehtävä 4. Laajenna Excel - taulukkoasi lukuun 0 ja negatiivisiin kokonaislukuihin.*

1. *Jatka lukujonoa 1,2,3,… ylöspäin Excel - lehdellä. Kopio aikaisemmin luomaasi kaavaa uusien lukujen vierelle.*
2. *Muuta lukujen esitystapaa saadaksesi ne kaikki esille (aloitus -> numero). Käytä lähtökohtaisesti ”murtolukua”, mutta joitakin lukuja saattaa joutua muuttamaan desimaalimuotoon eli ”yleiseksi” luvuksi.*

*Tehtävä 5. Määritä seuraavat arvot taulukon perusteella.*

*a.* $3^0$
*b.* $3^{-2}$
*c.* $3^{-5}$
*d.* $\log_3 1$
*e.* $\log_3 \frac{1}{3}$
*f.* $\log_3 \frac{1}{27}$
*g.* $\log_3 3^{-3}$

Laskennassa tarvittiin myös muita lukuja, kuin kokonaislukuja. Kokonaisluvuista poikkeavat murtolukuja vastaavat arvot eksponenttifunktiolle määriteltiin juurina kaavalla $k^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{k^m}$.

**Esimerkki.** Kaksikantaisen taulukon jäsentä $\frac{1}{2}$ vastaava arvo on $k^{\frac{1}{2}} = \sqrt{k}$.

**Tehtävä.** Täydennä kolmannen taulukon arvot.

| | $x$ | $2^x$ | |
|---|---|---|---|
| | -1 | ½ | |
| $+1$ | 0 | 1 | $\cdot 2$ |
| $+1$ | 1 | 2 | $\cdot 2$ |
| $+1$ | 2 | 4 | $\cdot 2$ |
| | 3 | 8 | |

| | $x$ | $2^x$ | |
|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | |
| $+0,5$ | 0,5 | $1 \cdot \sqrt{2}$ | $\cdot \sqrt{2}$ |
| $+0,5$ | 1 | 2 | $\cdot \sqrt{2}$ |
| $+0,5$ | 1,5 | $2\sqrt{2}$ | $\cdot \sqrt{2}$ |
| | 2 | 4 | $\cdot \sqrt{2}$ |
| | 2,5 | $4\sqrt{2}$ | |
| | 3 | 8 | |

| $x$ | $2^x$ |
|---|---|
| 0 | |
| 1/3 | |
| 2/3 | |
| 1 | |
| 4/3 | |
| 5/3 | |
| 2 | |
| 7/3 | |
| 8/3 | |
| 3 | |

LASKUSÄÄNNÖT

Matemaatikot havaitsivat 1400-luvulla, että kahden samassa geometrisessa lukujonossa olevan luvun kertolasku voidaan yksinkertaistaa niiden järjestystä vastaavien luonnollisten lukujen yhteenlaskuksi. Tämä oli merkittävä havainto laskentamenetelmien kehityksessä, sillä yhteenlaskut on kertolaskuja helpompi suorittaa.

| $n$ | $a_n = 2^n$ |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 4 |
| 3 | 8 |
| 4 | 16 |
| 5 | 32 |
| 6 | 64 |
| 7 | 128 |
| 8 | 256 |
| 9 | 512 |
| 10 | 1024 |
| 11 | 2048 |

**Esimerkki.** Laske $32 \cdot 64$ taulukon avulla.

**Ratkaisu.** 32 ja 64 ovat saman geometrisen lukujonon jäseniä, joten niiden kertolaskun voi muuntaa järjestyslukujen yhteenlaskuksi:

$$32 \cdot 64 \rightarrow 5 + 6 = 11$$

$$2048 \leftarrow 11.$$

Tämä ominaisuus pätee lukujonon $k^n$ lisäksi funktiolle $k^x$, missä x voi olla mikä tahansa reaaliluku. Kyseessä on nykyinen potenssien kertolaskukaava $k^x k^y = k^{x+y}$.

*Tehtävä 6. Laske seuraavat laskut tekemäsi taulukon avulla. KOMMENNTI: lisää laskuja saa helposti ottamalla lisää taulukoita käyttöön.*

*a.* $3 \cdot 27$

*b.* $729 \cdot 6561$

*c.* $243 \cdot 177147$

*Tehtävä 7. Laske taulukon avulla.*

*a.* $3^4 \cdot 3^6$

*b.* Ilmaise kohdan a lopputulos kolmen potenssina.

*Tehtävä 8. Olkoon* $eksp(x) = 3^x$.

*a.* Muodosta ja laske tulo $eksp(x) \cdot eksp(y)$, kun $x = 2$ ja $y = 5$.

*b.* Muodosta ja laske summa $eksp(x + y)$, kun $x = 2$ ja $y = 5$.

*Tehtävä 9. Laske taulukkoa apuna käyttäen, kun $x = 3$ ja $y = 7$.*

a. $\log_3(x) + \log_3(y)$
b. $\log_3(x \cdot y)$

KOMMENTTI. Lisää tehtäviä voi tehdä muista laskutoimituksista:

> Michael Stifel (1486 - 1567): kahden geometrisessä lukujonossa olevan luvun jakaminen voidaan muuntaa vähentämiseksi, potenssien laskeminen kertolaskuksi ja juurien määrittäminen jakolaskuksi.

Tarkasteluun voi ottaa myös sen, kuinka kantalukumuunnokset suhtautuvat käsiteltyihin kokonaislukutaulukoihin. Etenkin, jos joku keksii kysyä taulukoiden välisistä laskutoimituksista.

Vasta skotlantilainen John Napier (1550 -1617) ja hänen lisäkseen toinen matemaatikko, englantilainen Jost Burgi (1552 -1632), laskivat systemaattisesti taulukoita laskutoimitusten suorittamista ja yksinkertaistamista varten. Napier kehitteli taulukoiden perusteella omaa logaritmin määritelmäänsä kahdenkymmenen vuoden ajan. Koska kokonaislukutaulukoissa termien väliset etäisyydet kasvavat hyvin nopeasti hyvin suuriksi, tarkkojen tulosten saamiseksi olisi tarvittu valtava määrä taulukoita. Tähän ongelmaan ratkaisuksi Napier valitsi suhdeluvun, joka olisi niin lähellä lukua 1, että geometrisen jonon termit pysyisivät lähellä toisiaan. Aluksi Napier valitsi luvun $1 - 10^{-7}$, mutta välttääkseen turhan pitkiä desimaaleja päätti kertoa sen vielä luvulla $10^7$. Taulukkoon on laskettu seitsemää ensimmäistä logaritmia vastaavat luvut (taulukko 9).

Seuraavana vuonna lontoolainen professori Henry Briggs (1561 -1630) tutustui Napierin töihin. He olivat yhdessä Napierin kanssa sitä mieltä, että Napierin logaritmit kannattaisi muuntaa kymmenen potensseiksi. Kantaluvulla kymmenen logaritmeille pätisivät nykyisen logaritmifunktion laskusäännöt. Napier ei vanhuuttaan enää jaksanut ryhtyä työhön, mutta Briggs kehitti uuden järjestelmän heidän ideansa pohjalta. Aluksi hän laski lukujen 1-1000 logaritmit 14 numeron tarkkuudella ja myöhemmin vielä lukujen 1-20 000 ja 90 000-100 000 logaritmit samalla 14 numeron tarkkuudella.

TAULUKKO 9. NAPIERIN LOGARITMI.

| **Napierin logaritmi $L$** | **luku $N$** |
|---|---|
| 0 | $10^7(1-10^{-7})^0$ = $10^7$ |
| 1 | $10^7(1-10^{-7})^1$ = 9 999 999,0000000 |
| 2 | $10^7(1-10^{-7})^2$ = 9 999 998,0000001 |
| 3 | 9 999 997,0000003 |
| 4 | 9 999 996,0000006 |
| 5 | 9999 995,0000010 |
| ⋮ | ⋮ |
| 100 | 9 999 900,000495 |
| ⋮ | ⋮ |
| $10^7$ | $10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{10^7}$ |

## 6.2 Opetuskokonaisuuden toinen osio (eksponenttifunktio objektina/ eksponenttifunktion konstruktio)

Pitkässä matematiikan menetelmillä eksponenttifunktio kyetään määrittelemään vain rationaaliluvuille. Tässä on tarkoituksena tutustua sellaiseen määritelmään, jolla kyetään rakentamaan kaikille reaaliluvuille määritelty eksponenttifunktio. Se on esitetty kokonaisuudessaan taustamateriaalissa. Tässä esiteltävässä menetelmässä eksponenttifunktio määritellään sen käänteisfunktion, logaritmifunktion kautta. Menetelmässä aloitetaan tekemällä sama, kuin mitä lukiomatematiikan kursseilla sekä edellisessä osiossa tehtiin. Eksponenttifunktio määritellään kaikille rationaaliluvuille (taustamateriaali).

Seuraavien osioiden rinnalla on tarkoitus rakentaa oma eksponenttifunktio GeoGebra – ohjelman avustuksella. Rakennusvaiheet on suoritettava aina, kun tekstin lomassa on viittaus ”konstruktiotehtävä”. Alla on vielä koottuna tavoitteessa olevan eksponenttifunktion ominaisuudet.

*KOMMENTTI: Materiaalin edetessä konstruktiotehtävistä on sulkeissa lyhyt kuvaus, kokonaisuudessaan ne löytyvät selkeyden vuoksi vasta osion lopusta. Opiskelijoiden tason mukaan tulee miettiä, kuinka tehtävät esittää. Toinen ääripää on vaihe vaiheelta saneltava resepti ja toinen taas on vapaa tehtävänanto, jossa konstruktiota ei ole paloiteltu tai ohjeistettu, ainoastaan annettu määränpää. Konstruktiotehtävät on tässä tehty siten, että ne ovat edellisten ääripäiden välimuoto. Lopusta löytyy myös ratkaisut tehtäviin.*

Tavoitteena on määritellä funktio

$$eksp(x) = a^x, a > 0.$$

Funktiolla tulee olla ominaisuus:

$$eksp(x + y) = eksp(x) \cdot eksp(y) \text{ kaikille } x\epsilon\mathrm{R} \text{ ja } y\epsilon\mathrm{R}.$$

Oletetaan, että funktiolla on käänteisfunktio

$$log(x) = \log_a x, \quad x > 0.$$

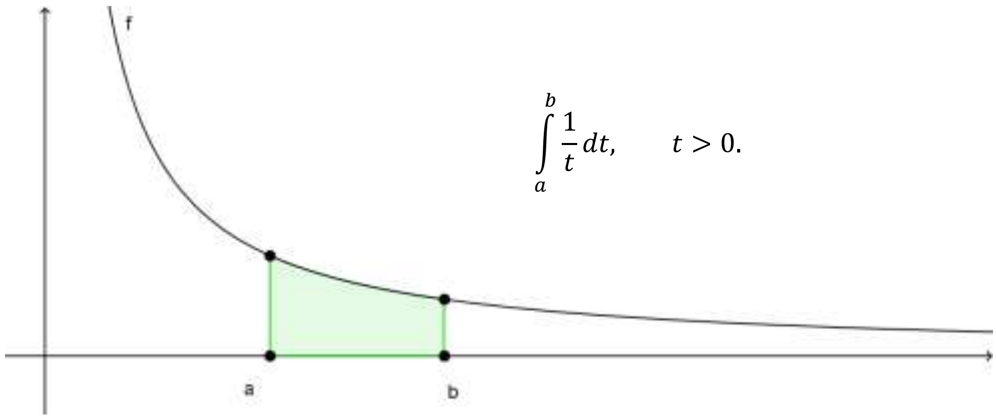
Käänteisfunktiolla tulee olla ominaisuus

$$log(x \cdot y) = log(x) + log(y) \text{ kaikille } x\epsilon\mathrm{R} \text{ ja } y\epsilon\mathrm{R}.$$

Lisäksi halutaan funktion olevan derivoituva.

LOGARITMIFUNKTION KONSTRUKTIO

Funktiosta $\frac{1}{t}, t > 0$ tiedetään, että se on derivoituva. Voidaan siis laskea sen kuvaajan ja x – akselin välille syntyvän alueen pinta-ala välillä $[a, b]$ muodostamalla määrätty integraali:




**Konstruktiotehtävä 1. (Rakennetaan $\int_a^b \frac{1}{t} dt, \ > 0$)**

Seuraavaksi muodostetaan määrätystä integraalista funktio kiinnittämällä luku $a$ ja tekemällä luvusta $b$ muuttuja $x$. Pinta- ala olisi sama, vaikka luku b olisi kiinnitetty ja luvusta a tehty muuttuja x, ainoastaan eri merkkinen.

$$l(x) = \int_a^x \frac{1}{t} dt, \qquad x > 0, a > 0.$$

Täsmällinen perustelu sille, miksi aloitetaan juuri funktiosta $\frac{1}{t}$, $t > 0$, löytyy taustamateriaalista. Tarkoituksena on muodostaa funktiosta $l(x) = \int_a^x \frac{1}{t} dt, x > 0, a > 0$ logaritmifunktio valitsemalla sopiva alarajan arvo $a$.

**Konstruktiotehtävä 2. (Rakennetaan $l(x) = \int_2^x \frac{1}{t} dt, x > 0$ ja toinen vastaava omavalintaisella alarajalla. Funktioiden arvoja tutkitaan taulukoimalla)**

Saadun funktion voi todeta logaritmifunktioksi, jos sille pätee $l(xy) = l(x) + l(y)$. Esimerkiksi funktio $l(x) = \int_2^x \frac{1}{t} dt, x > 0$ ei kelpaa logaritmifunktioksi, sillä se ei toteuta sääntöä $l(xy) = l(x) + l(y)$. Arvot on määritetty edellisessä konstruktiotehtävässä.

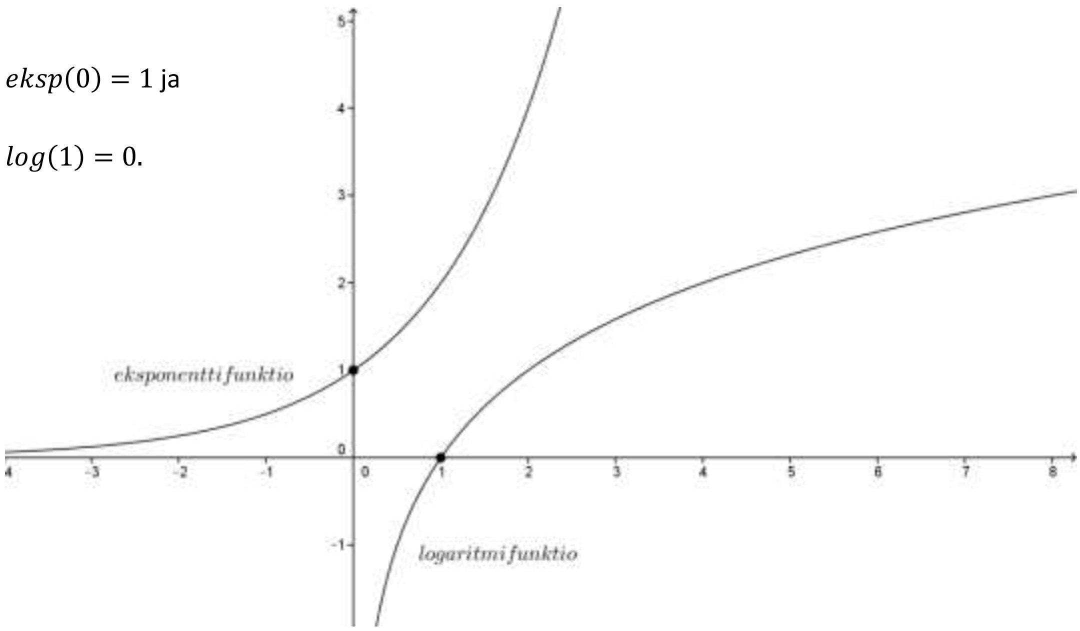
$$l(3 \cdot 4) = l(12) \approx 1{,}79 \neq \ l(3) + l(4) \approx 0{,}41 + 0{,}69 = 1{,}10$$

**Konstruktiotehtävä 3. (Kohdan 2 funktiota testataan)**

Kokeilemalla tarpeeksi montaa alarajaa, voisi mahdollisesti löytää funktion, joka läpäisisi logaritmifunktiotestin. (On jopa mahdollista, että löysit sopivan alarajan jo edellisessä konstruktiotehtävässä!) Alaraja on mahdollista myös päätellä. Pitkän matematiikan kursseilla on jo määritelty eksponenttifunktiolle arvo $a^0 = 1$ (tämä tehtiin heti alkuun myös taustamateriaalin määrittelyssä). Jos eksponenttifunktio saa kohdassa 0 arvon 1, sen käänteisfunktio logaritmifunktio saa puolestaan kohdassa 1 arvon 0 (tämä päättely on yhtäpitävää logaritmin määritelmän kanssa: $\log_a 1 = 0$, kun $a^0 = 1$):

$eksp(0) = 1$ ja

$log(1) = 0.$



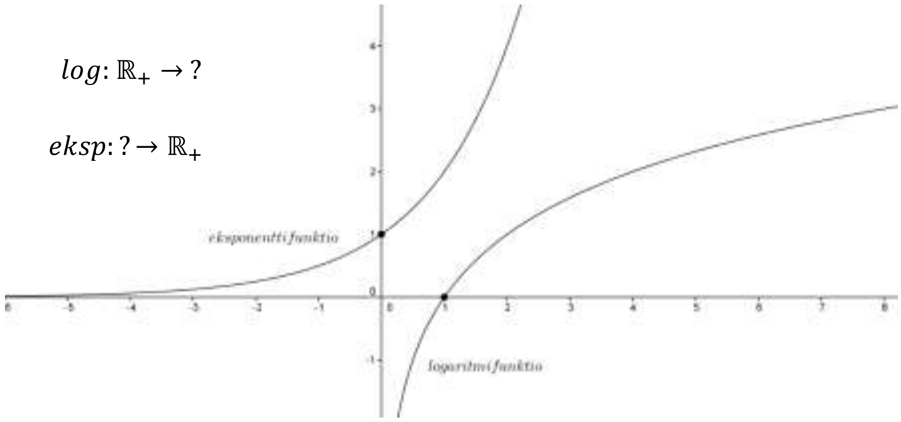

**Konstruktiotehtävä 4. (Ratkaistaan yhtälöstä $\boldsymbol{l(x) = \int_a^x \frac{1}{t}\,dt}$ alaraja a, kun $\boldsymbol{l(0) = 1}$.)**

**Konstruktiotehtävä 5. (Rakennetaan ja tutkitaan funktiota $\boldsymbol{l(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt, x > 0}$.)**

Koska funktio $l(x)$ toteuttaa konstruktiotehtävässä neljä valitun alarajan kanssa logaritmifunktion ominaisuuden $log(x \cdot y) = log(x) + log(y)$, voidaan se nimetä logaritmifunktioksi. Taustamateriaalissa todistetaan kyseinen omianisuus täsmällisesti ja lisäksi muut logaritmifunktion ominaisuudet.

Määritelmä $log(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt, x > 0.$

Logaritmifunktiosta tiedetään tähän mennessä, että se en määrittelyjoukko on positiiviset reaaliluvut. Sen arvojoukkoa ei kuitenkaan tiedetä. Logaritmifunktion arvojoukon tulisi olla koko reaalilukujen joukko, koska tällöin lopullisena tavoitteena olevalle eksponenttifunktiolle saataisiin määrittelyjoukoksi koko reaalilukujen joukko (kuva).




**KUVA 17**

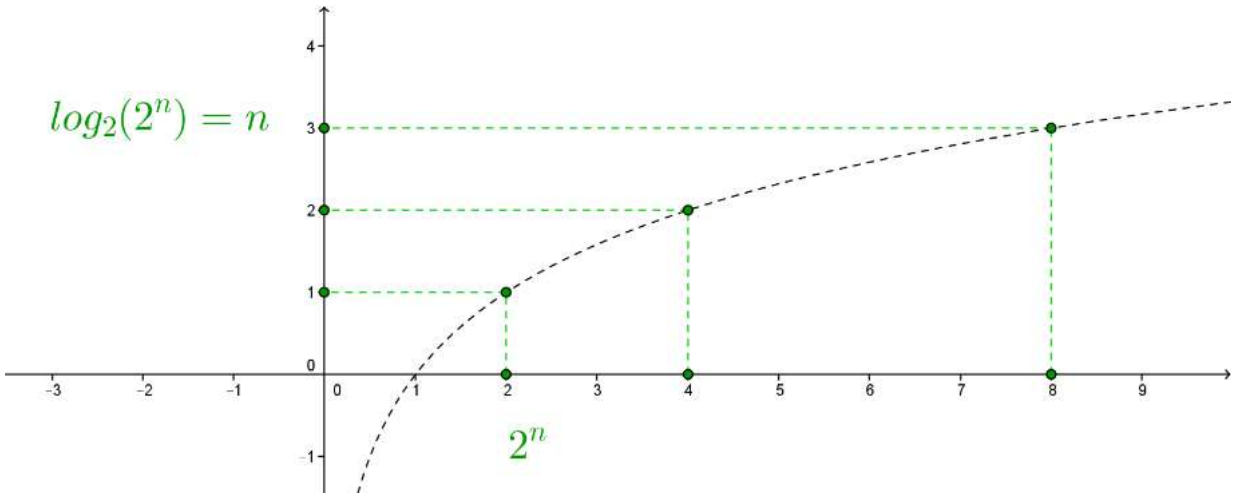
Kuvan (esimerkiksi kuva 17) perusteella ei voi olla varma, että logaritmifunktio kasvaa rajatta. Kuvaajan visuaalisen havainnoinnin perusteella näyttää, että funktion kasvu hyytyy kauan ennen kuin se saavuttaa esimerkiksi arvoa 100 000. Seuraavassa esimerkissä kuitenkin todistetaan, että logaritmifunktiolla oikeasti *on* kyseinen arvo. Esimerkissä käytetään kantalukua 2, mutta sama pätee mille tahansa kantaluvulle $k > 1$.

**Esimerkki.** Saako logaritmifunktio $\log_2 x$ arvon 100 000?

**Ratkaisu.**

Olkoon $n = 100\ 000$.

Tällöin on olemassa luku $2^{100\ 000}$. Aikaisemmin todettiin, että lukujono $2^n$ sisältyy funktion $\log_2 x$ muuttujiin. Voidaan siis sijoittaa luku $2^{100\ 000}$ logaritmifunktioon. Saadaan arvo $\log_2(2^{100\ 000}) = 100\ 000$.



Sama pätee kaikille kantaluvuille $k > 1$ ja kaikille luonnollisille luvuille $n$. Koska lukujono $k^n, k > 1$ sisältyy logaritmifunktion muuttujiin, on olemassa arvo

$\log k^n = n \cdot \log k$, kaikille luonnollisille luvuille.

Koska $\log k > 0$, niin lukua $n$ kasvattamalla saadaan funktion $\log(x)$ arvo niin suureksi, kuin tarpeen. Samoin voidaan todistaa, että logaritmifunktio pienenee rajatta.

Koska nyt tiedetään logaritmifunktion määrittelyjoukko ja arvojoukko, voidaan rakentaa niiden perusteella eksponenttifunktio.

**Konstruktiotehtävä 6. (Logaritmifunktion kääntäminen eksponenttifunktioksi.)**

Taustamateriaalissa testataan menestyksekkäästi säännöllä $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ funktion $eksp$ olevan eksponenttifunktio.

Selvittämättä on enää rakennetun funktion kantaluku. Tämän selvittämiseen voidaan käyttää sitä eksponenttifunktion ominaisuutta, että kantaluku on sama kuin funktion arvo kohdassa $eksp(x) = (eksp(1))^x$.

> **Esimerkki.** Funktion $2^x$ kantaluku on 2. Funktion arvo kohdassa 1 on sama kuin sen kantaluku: $2^1 = 2$.

Määrittämällä funktion arvon kohdassa $x = 1$ saadaan selville kantaluku.

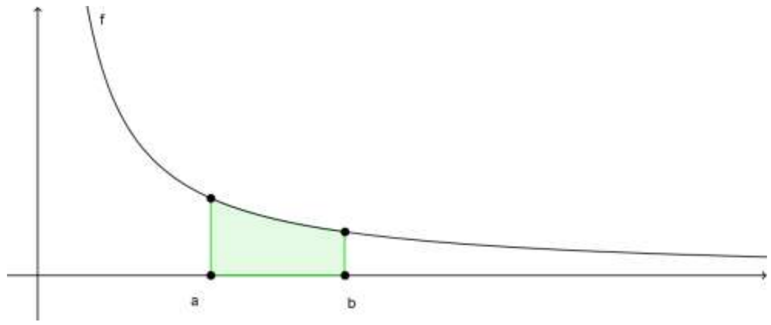
**Konstruktiotehtävä 6. (Määritetään kantaluvulle likiarvo.)**

Tämän luku on vastaavanlainen luku kuin $\pi$, eli tarkkaa desimaaliesitystä sille ei voi antaa. Se on piin tavoin tärkeä luku matematiikassa, joten sille on myös annettu oma symboli $e$. Konstruktiovälivaihein rakennettu funktio on siis funktio $e^x$. Tämän funktion avulla on mahdollista luoda kaikkien eksponenttifunktioiden joukko $a^x, a > 0$.

**Konstruktiotehtävä 7. (Muodostetaan kaikkien eksponenttifunktioiden joukko.)**

### 6.2.3 Konstruktiotehtävät ja ratkaisut

**Konstruktiotehtävä 1.** Luo GeoGebralla funktio $\frac{1}{t}, t > 0$. Aseta liukuluvut a ja b. Muodosta sen jälkeen integraali $\int_a^b \frac{1}{t} dt, > 0$ kuten kuvassa.




**Konstruktiotehtävä 2.**

**a.** Rakenna GeoGebralla funktio $l(x) = \int_a^x \frac{1}{t} dt, x > 0$. Aseta alarajaksi $a = 2$.

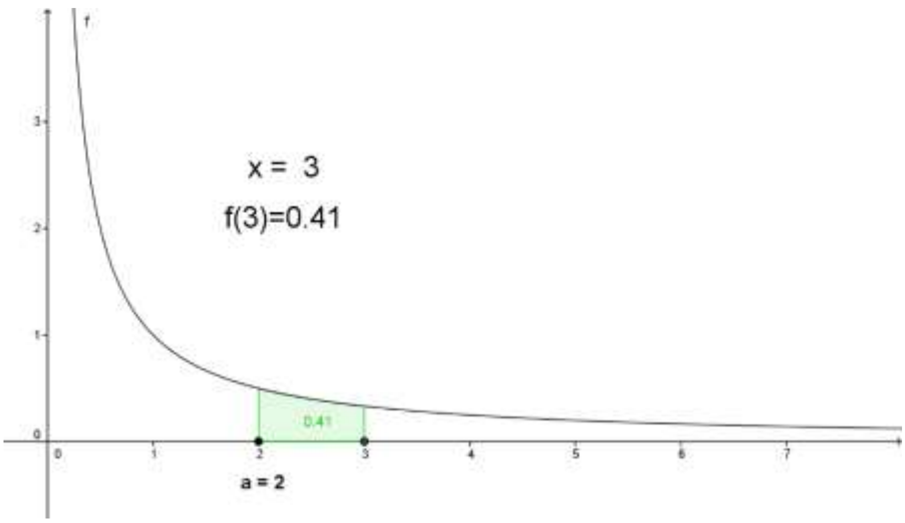
**b.** Täytä taulukkoon GeoGebran laskemat funktion $l$ likiarvot taulukon muuttujille.

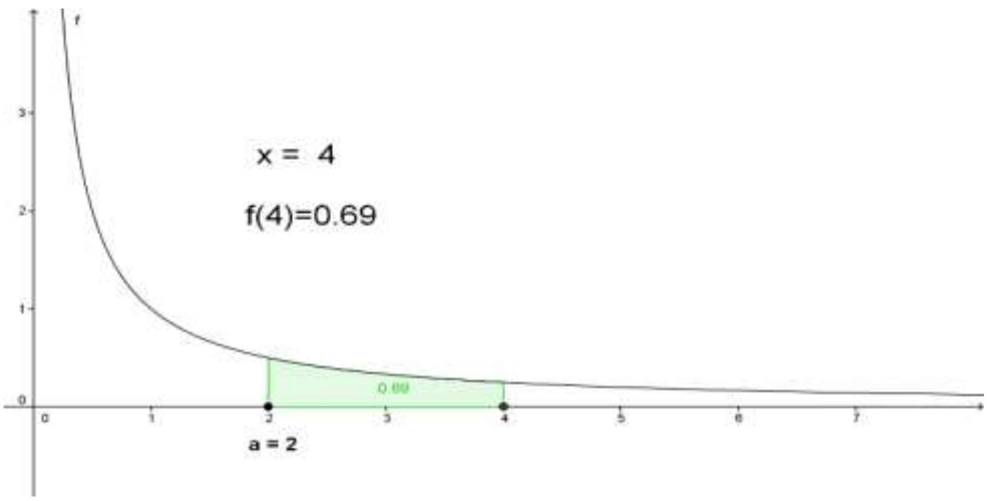
**c.** Rakenna GeoGebralla funktio $m(x) = \int_a^x \frac{1}{t} dt, x > 0$. Valitse sille itse alaraja $a > 0$.

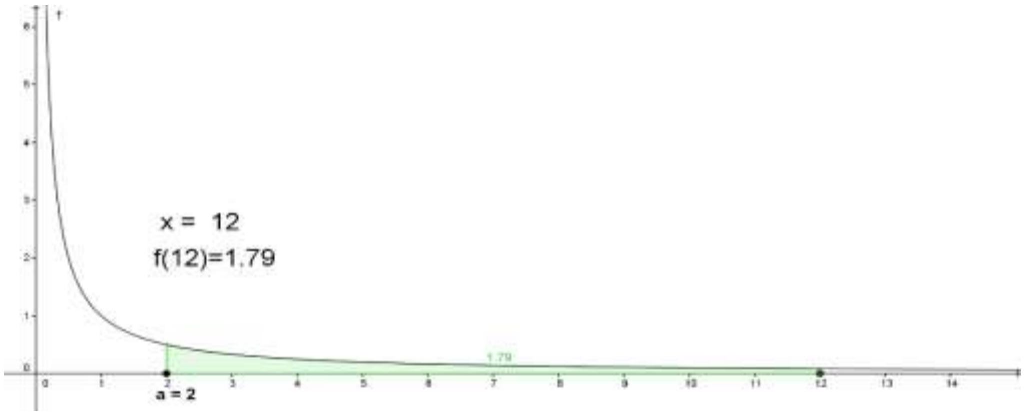
**d.** Täytä taulukkoon GeoGebran määrittämät funktion $m$ likiarvot.

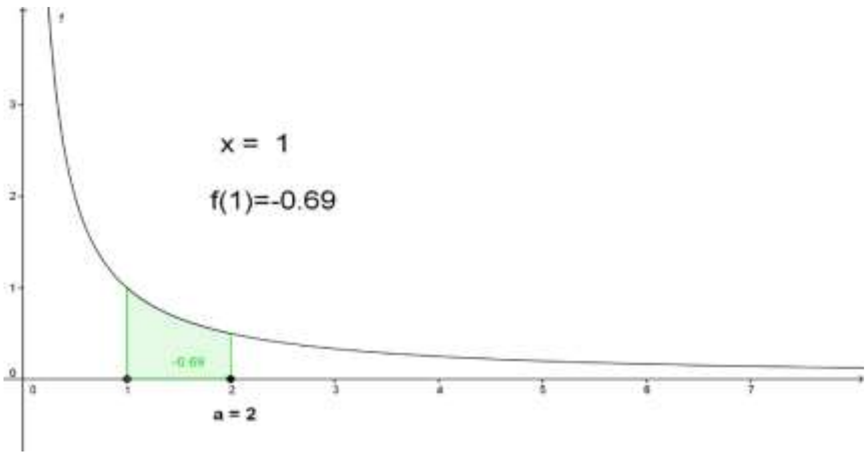
| $\boldsymbol{x}$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 10 | 100 | 1000 | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{10}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{l(x)}$ | | | | | | | | | | | | |
| $\boldsymbol{m(x)}$ | | | | | | | | | | | | |

**Ratkaisuesimerkki.** Olkoon $a = 2$, jolloin $f(x) = \int_2^x \frac{1}{t} dt, x > 0$. Määritetyt arvot ovat likiarvoja.






**Konstruktiotehtävä 3.** Testaa rakentamasi funktio $m(x)$, päteekö niille sääntö $log(a) + log(b) = log(ab)$? Ohje: valitse taulukosta luvuille $a$ ja $b$ jotkin muuttujan $x$ arvot. Sijoita ne sitten yhtälöön ja katso taulukosta funktion arvot. Päteekö yhtälö?

**Konstruktiotehtävä 4.** Käytä hyväksesi tietoa $l(1) = 0$ ja ratkaise $a$ yhtälöstä:

$$l(x) = \int_a^x \frac{1}{t} dt.$$

**Ratkaisu**.

$$0 = \int_a^1 \frac{1}{t} dt, \qquad x > 0, a > 0.$$

$$0 = \int_1^1 \frac{1}{t} dt, \qquad x > 0.$$

Ratkaisuksi saadaan $a = 1$, jolloin: $l(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt, x > 0.$

**Konstruktiotehtävä 5.**

a. Aseta aikaisemman jo tekemäsi funktion $l(x) = \int_a^x \frac{1}{t} dt$ alarajaksi $a = 1$.

b. Täytä taulukkoon GeoGebran määrittämät funktion $l$ likiarvot.

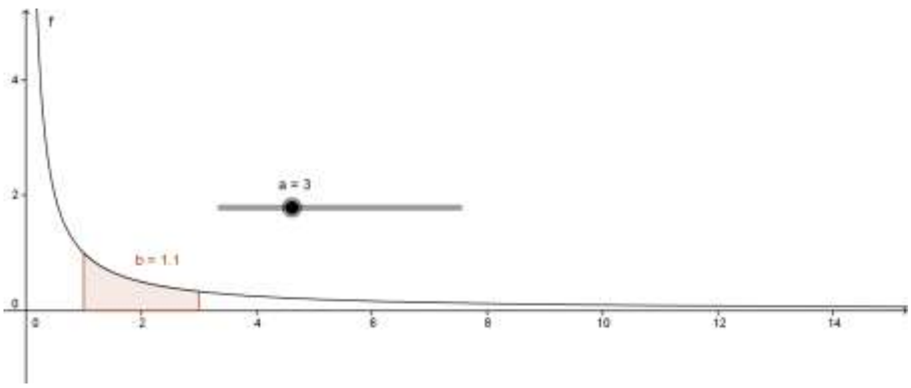
| $\boldsymbol{x}$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 10 | 100 | 1000 | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{10}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{l(x)}$ | | | | | | | | | | | | |

c. Piirrä funktion kuvaaja. Ohje: määrittele piste, jonka x-koordinaatti on funktion muuttuja ja y-koordinaatti on funktion arvo. Asta pisteelle ”jälki käyttöön”.

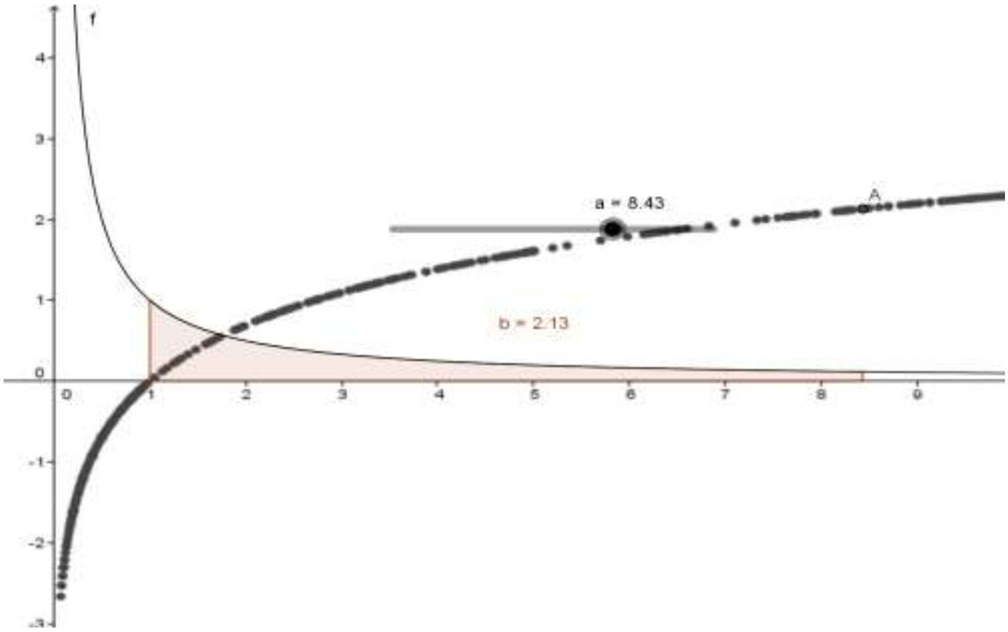
d. Testaa saamillasi arvoilla, päteekö funktiolle sääntö $l(x \cdot y) = l(x) + l(y)$.

**Ratkaisu.**

Kohdat a ja b. Lukua a säätämällä saa arvoja b, joille pätee $l(a) = b$, kun $l(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt, x > 0.$

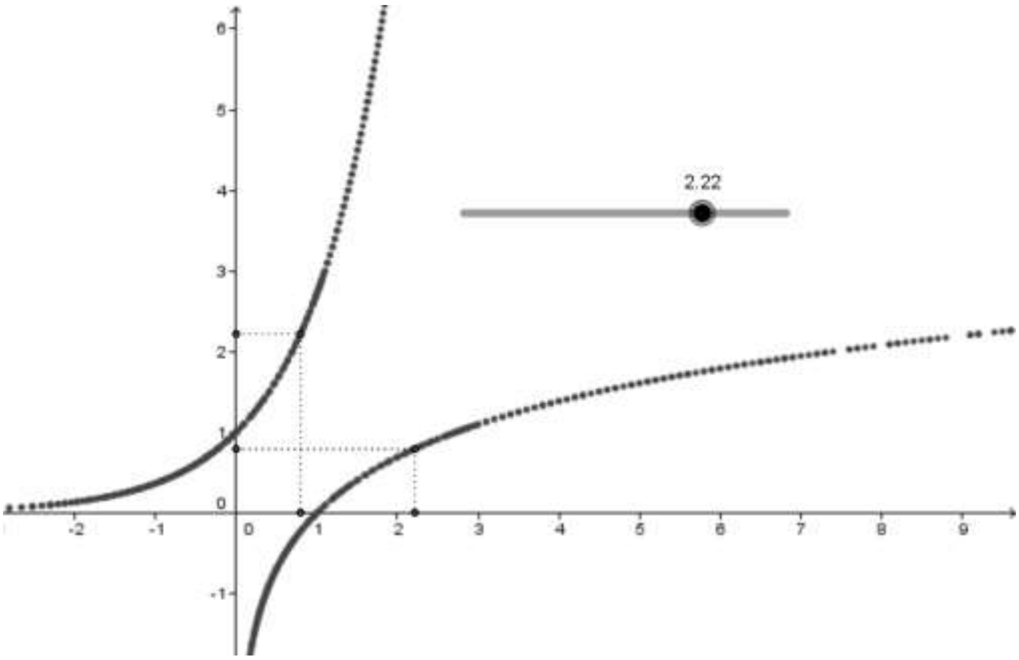


Kohta c. Määritellään piste $A = (a, b)$. Valitaan valikosta ”jälki käyttöön”, jolloin piirtyy logaritmifunktio.

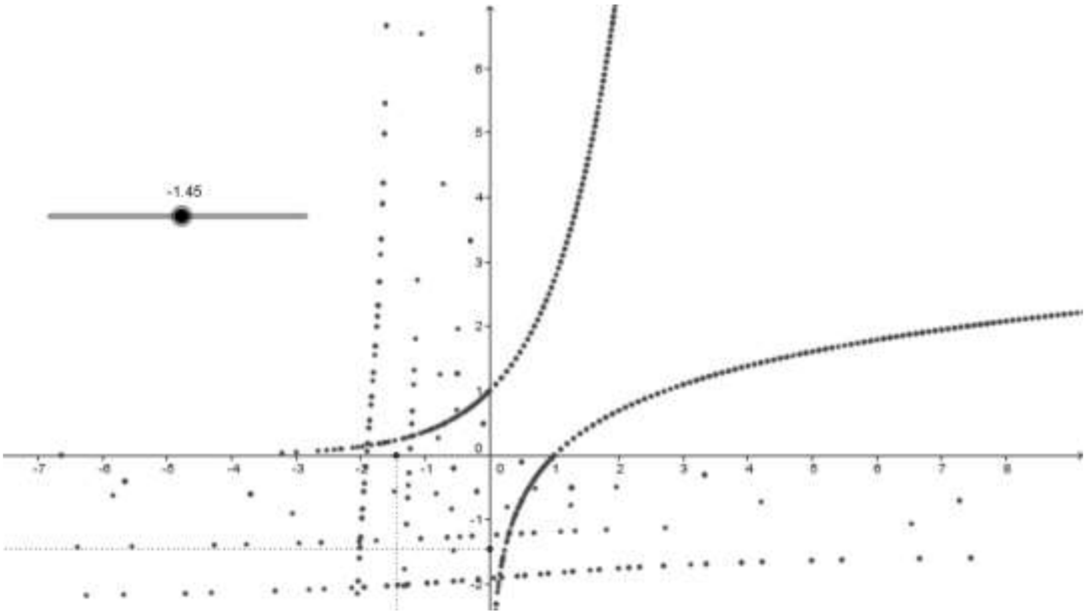



**Konstruktiotehtävä 6.** Rakenna funktio $eksp(x) = y, y > 0$ logaritmifunktiosta $log(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt, x > 0$.

**Ratkaisu.**

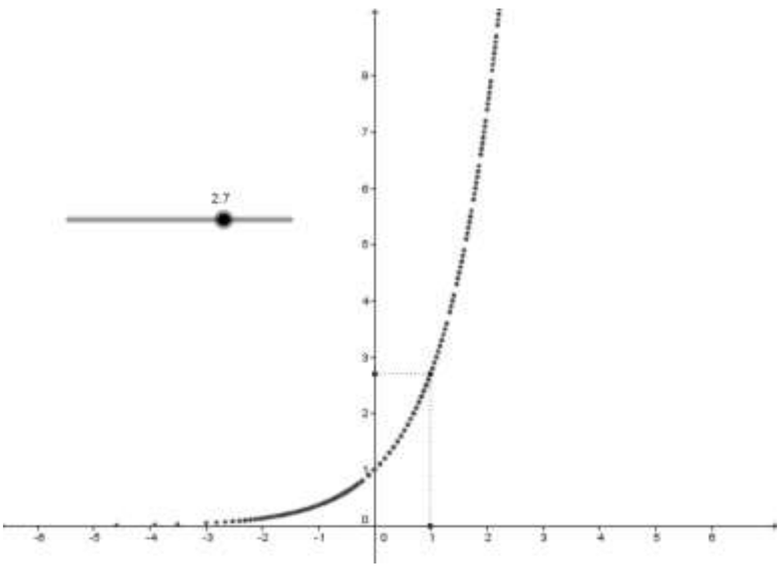


**Hauska lisähuomio**. Jos logaritmifunkiton määrittelyjoukosta $x > 0$ poikkeaa, eivät saadut arvot asetu enää funktioiden kuvaajille.




**Konstruktiotehtävä 7.** Määritä likiarvo $eksp(1)$ GeoGebran avulla.

**Ratkaisu.**




$eksp(1) \approx 2{,}7$.

**Konstruktiotehtävä 8.** Luo funktiosta $eksp(x) = e^x$ kaikkien eksponenttifunktioiden joukko $a^x, a > 0$ seuraavien välivaiheiden avulla.

a. Esitä luku $a$ luvun $e$ potenssina. Käytä apuna logaritmin määritelmää $b^y = x \Leftrightarrow y = \log_b x$.
b. Muodosta $a^x$ luvun $e$ avulla.
c. Aseta GeoGebraan liukuluku $a$ ja kohdan b funktio.

# 7 Loppusanat

Tämä tutkielma on matematiikan aineenopettajan opintojeni viimeinen suoritus. Pohdin vielä lopuksi, mitä tämän työn tekeminen antoi minulle matematiikan opettajana. Hyödylliseksi varmasti osoittautuu sekä lopullinen tuotos (luvun 6 opetuskokonaisuus), kuin koko siihen johtanut prosessi.

Hyvin mielenkiintoista olisi, jos minulle joskus tarjoutuisi tilaisuus toteuttaa työhön suunnittelemani opetuskokonaisuus. Mielenkiintoista siinä on esimerkiksi se, että en kaikesta analysoinnista huolimatta osaisi yhtään ennakolta sanoa, olisiko kokonaisuus tasoltaan sopiva, vaikka tuntisinkin oppilaat entuudestaan. Toinen asia joka minua kiinnostaa on, että onnistuisinko välittämään kokonaisuuden yhtä mielenkiintoisena kuin sen itse koen. Lopullisen vastauksen edellisiin kysymyksiin saa vasta käytännön kokemuksen myötä.

On mahdollista, että minulle ei tule koskaan tarjoutumaan tilaisuutta toteuttaa edellisessä luvussa esiteltyä opetuskokonaisuutta eksponenttifunktiosta. Opetuskokonaisuudesta on onneksi mahdollista käyttää paloja tai ideoita myös pakollisten kurssien opetuksessa. Historiaosio laskutoimituksineen sopii yhteen pitkän matematiikan ensimmäisen kurssin potenssia, logaritmia ja eksponenttifunktiota koskevien sisältöjen kanssa. Sen avulla opetusta voi elävöittää. Historian avulla on mahdollista antaa konkreettisia havainnollistuksia määritelmistä ja niihin liittyvistä laskusäännöistä. Lopulta laskutaulukoissa esiintyvät lukujonot voi täydentää eksponentti- ja logaritmifunktioiksi. Tämän työn ansiosta minulla on nyt myös valmis hyvä havainnollistus neperin luvulle. Ensiksi siinä määritetään funktio $e^x$ eksponenttifunktioiden joukosta $a^x, a > 0$ käyttäen tietoa sen derivaattafunktiosta $De^0$ =1. Tämä vastaa kirjasarjan Pyramidi esimerkkiä (tämän työn luku 3, s. 18-19). Tällöin kantaluvuksi tulee neperin luku. Neperin luvun saa myös määrittämällä (liki)arvon $e^x$, kun $x = 1$. Käänteisfunktioiden opetuksessa voi hyödyntää historiaosion geometrisiin lukujonoihin liittyviä taulukoita, joissa funktioiden käänteinen toiminta näkyy havainnollisesti. Kaikkein parhaiten opetuskokonaisuuden sisällöt soveltuvat integraalikaavan $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$ havainnollistukseen.

Työtä tehdessä oppimani taidot ovat kuitenkin ehdottomasti vielä arvokkaampia kuin edelliset enemmän tai vähemmän valmiit opetusideat. Paljon kehittyivät sekä matemaattiset, että matematiikan opetuksen taitoni. Työn opetuksen suunnitteluun liittyvät lähtökohdat pakottivat ottamaan korkeakoulutasoiseen matematiikkaan uudenlaisen näkökulman. Aikaisemmin olen lukenut sitä vain yliopistokursseilla tavoitteena saada kurssit suoritettua. Nyt teoriaa oli kuitenkin luettava siten, että kykenisi selittämään sen muille ja kirjoittamaan siitä. Tämä pakotti selvittämään, mistä asioissa oikeasti on kyse. Palkitsevaa oli löytää käymästäni teoriakokonaisuudesta kiehtovia ideoita (esimerkiksi logaritmifunktion kuvaajan piirtyminen integraalista $\int \frac{1}{x} dx$). Tämä prosessi antaa sekä itsevarmuutta, että motivaatiota opiskella matematiikkaa jatkossakin. Myös symboliikan käyttöön oli pakko kiinnittää suurempaa huomiota kuin mitä aikaisemmin olin tottunut tekemään. Ymmärsin uudella tavalla symboliikan käytön merkityksen. Aikaisempi huolimattomuuteni sitä kohtaan on johtunut siitä, että olen kokenut sen useasti vain turhana viisasteluna kontekstiin nähden. Matematiikan opettamisen taitoni kehittyivät myös, sillä jouduin laatimaan opetusmateriaalin huomattavasti vaativammalla tasolla, kuin mitä aikaisemmin olen tehnyt. Jos kykenin tekemään näinkin vaativista asioista havainnollistuksia ja esimerkkejä, niin jatkossa helpompien asioiden yhteydessä se sujuu varmasti entistä paremmin.

Kaiken kaikkiaan tämä gradu on hyvin laaja-alainen, opetuskokonaisuuden suunnitteluun liittyvää tutkimustehtävää ajatellen ehkä liiankin laaja-alainen. ”Virallisen” tutkimustehtävän taustalla olevia henkilökohtaisia tavoitteita laaja-alaisuus palvelee, sillä tarkoituksenani oli rakentaa yhteen (koulu)matematiikan osa-alueeseen mahdollisimman rikas näkökulma.

## Lähteet


Asiala, M. Brown, D. DeVries, E. Dubinsky, D. Mathews and K. Thomas. 1996. *A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education*. Research in Collegiate Mathematics Education II, CBMS Issues in Mathematics Education, 6 (s.1-32).

Boyer, C. & Merzbach, U. C. 1994. *Tieteiden Kuningatar: matematiikan historia osa1.* Juva: WSOY.

Braidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J., & Nichols, D. 1992. *Development of process conception of function.* Educational studies in mathematics, 23 (s. 247-285).

Confrey, J & Smith, E. 1994. *Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit.* Educational Studies in mathematics 26.2-3. 135-164.

Dawn, A. S. 2008. *A Case Study of a Secondary Mathematics Teacher's Understanding of Exponential Function: An Emerging Theoretical Framework*. Arizona State University, Proquest 2008.

Dubinsky, E. 1991. *Reflective abstraction in advanced mathematical thinking.* Advanced mathematical thinking. Springer Netherlands. 95-126.

Dubinsky, E., & McDonald, M. A. 2002. *APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research*. In The teaching and learning of mathematics at university level (s. 275-282). Springer Netherlands.

Hamdan, M. 2008. *One concept and two narrations: the case of logarithm*. Primus: problems, resources and issues in mathematics undergraduate studies, Taylor & Francis. Julkaistu internetissä 10.11.2008.

Harjulehto, P., Klén, R. & Koskenoja, M. 2014. *Analyysiä reaaliluvuilla*. Unigrafia.

Kangasaho, J., Mäkinen, J., Oikkonen, J., Paasonen, J., Salmela, M. & Tahvanainen, J. 2000. *Funktiot ja yhtälöt 1.* Porvoo: Wsoy oppimateriaalit.

Kangasaho, J., Mäkinen, J., Oikkonen, J., Paasonen, J., Salmela, M. & Tahvanainen, J. 2006. *Pitkä matematiikka: juuri- ja logaritmifunktiot.* Porvoo: Wsoy oppimateriaalit.

Kontkanen, P., Lehtonen, J., Luosto, K. & Savolainen, S. 2006. *Pyramidi 8*. Helsinki: Kustannusosaleyhtiö Tammi.

Lehtinen, M. 2012. *Matematiikan historian luentoja.* Helsingin Yliopiston opetusmoniste. Tulostettu 26.5.2015. http://wiki.helsinki.fi/pages/viewpage.action?pageId=79570733

Opetushallitus 2003. *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2003*. Vammala: Vammalan kirjapaino.

Panagiotou, E. N. 2011. *Using History to teach mathematics: the case of logarithms.* Science & education 20, s. 1-35.

Pitta-Pantazi, D., Christou, C. & Zachariades, T. 2007. *Secondary school students' levels of understanding in computing exponents.* Journal of Mathematical Behavior 26, s. 301-311.

Sfard, A. 1991. *On the dual nature of mathematical conceptions.* Educational studies in mathematics 22, s.1-36.

Spivak, M. 1994. *Calculus*. (kolmas painos). New York: Cambridge university press. Alkuperäisjulkaisu 1967.

Salas, S. L. & Hille, E. 1971. *One and several variables calculus.* Waltham: Xerox college publishing.

Tall, D. 2013. *How Humans Learn to Think Mathematically.* New York: Cambridge University Press.

Weber, K. 2002a. *Students' Understanding of Exponential and Logarithmic Functions*. Tulostettu 3.2.2014. http://www.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/pap145.pdf.

Weber, K. 2002b. *Developing students' understanding of exponents and logarithms*. Tulostettu 3.2.2014. http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED471763.pdf.